

DAVID BLOCK SEVILLA

# Más de uno, pero menos de dos.

La enseñanza de las fracciones y  
los decimales en la educación básica.  
Otra vía en el aprendizaje de las matemáticas



Prólogo: Luis Manuel Aguayo



TABERNA LIBRARIA EDITORES



Más de uno, pero menos de dos.

**La enseñanza de las fracciones y los decimales  
en la educación básica.**

**Otra vía en el aprendizaje de las matemáticas**



**Más de uno, pero menos de dos.**  
**La enseñanza de las fracciones y**  
**los decimales en la educación básica.**  
**Otra vía en el aprendizaje de las matemáticas**

---

**DAVID BLOCK SEVILLA**



**Departamento de  
Investigaciones  
Educativas**



Block Sevilla, David (2022) Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica. Otra vía en el aprendizaje de las matemáticas.

Primera edición

216 páginas, con ilustraciones y referencias

México, Autores, 2022

ISBN: 978-607-8731-74-9

*Más de uno, pero menos de dos.*

*La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica.*

*Otra vía en el aprendizaje de las matemáticas*

DR © David Block Sevilla

DR © UPN, Zacatecas

DR © 2022 Cinvestav

DR © Taberna Libraria Editores

Fernando Villalpando 206

Centro, 98000 Zacatecas, Zacatecas

tabernalibrariaeditores@gmail.com

Revisora de contenido: IRMA SAIZ

Diseño y formación: DONDANI

Corrección de estilo:

VERÓNICA ARELLANO ROSALES

MARGARITA RAMÍREZ BADILLO

LAURA G. RESÉNDIZ ZAMUDIO

Primera edición: octubre, 2022

ISBN:978-607-8731-74-9

Reservados todos los derechos. No se permite la reproducción total o parcial de esta obra, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio (electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros) sin autorización previa y por escrito de los titulares del *copyright*. La infracción de dicho derecho puede constituir un delito contra la propiedad intelectual.

Impreso en México / Printed in Mexico

# ÍNDICE

<b>Agradecimientos</b>	<b>11</b>
<b>Prólogo</b>	<b>13</b>
<b>Introducción</b>	<b>21</b>
<b>Capítulo 1. Las fracciones y la división</b>	<b>35</b>
Introducción	36
Tema 1. El reparto en los primeros grados de la primaria	37
1.1 Primera tarea: repartir entre 2 y entre 4	37
1.2 Segunda tarea: repartir entre 3	40
1.3 Tercera tarea: comparar resultados de un mismo reparto	42
Tema 2. Diversidad de situaciones de reparto	47
Tema 3. La fracción como cociente de dos enteros	56

3.1 Generalización del resultado de los repartos: $m$ unidades entre $n$ es igual a $\frac{m}{n}$ de unidad	56
3.2 Un problema de división en el que no se reparten pasteles	63
3.3 Dos definiciones de las fracciones: como partes de unidad y como cocientes	81
<b>Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones</b>	<b>83</b>
Tema 1. La comparación de razones sin fracciones	85
1.1 ¿Qué naranjada sabe más a naranja?	85
1.2 ¿Qué trato conviene más?	92
1.3 ¿Qué rana da saltos más grandes?	95
Tema 2. Las razones se expresan con fracciones	101
2.1 Un primer ejemplo	101
2.2 Un caso de uso espontáneo de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ , en sexto grado	103
2.3 Ordenar razones, teniendo a la vista las fracciones que las representan	107
2.4 Ubicar razones entre fracciones en la recta numérica	113
2.5 Comparar una razón expresada con una fracción, contra otras razones expresadas mediante un par de números naturales.	116



<b>Capítulo 3. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos</b>	<b>125</b>
Introducción ¿Qué significa multiplicar por $\frac{3}{4}$ ?	125
Tema 1. La multiplicación de fracciones en el contexto de la proporcionalidad	128
1.1 Las fracciones como razones internas	130
1.2 Las fracciones como constantes de proporcionalidad	137
Tema 2. La división de fracciones y decimales en el contexto de la escala	157
2.1 Dos casos en los que la división de fracciones tiene el mismo sentido que la división de números naturales	158
2.2 El caso general: la división, como operación inversa de la multiplicación	161
Tema 3. La multiplicación de fracciones y decimales en el cálculo del área del rectángulo	174
3.1 Del área de un rectángulo cuyos lados miden fracciones, al algoritmo de la multiplicación	175
3.2 Aproximaciones al área de un rectángulo mediante decimales.	176
Colofón	178

<b>Solucionario</b>	<b>179</b>
Capítulo 1. Las fracciones y la división	179
Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones	189
Capítulo 3. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos	194
<b>Notas</b>	<b>205</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>209</b>
<b>El autor</b>	<b>213</b>

## AGRADECIMIENTOS

Para la elaboración de esta obra he contado con la valiosísima colaboración de varios colegas. Irma Saiz, revisó los contenidos matemáticos y didácticos. Además de sus numerosas observaciones, aportó generosamente lecciones de sus libros de texto junto con algunas reflexiones para facilitar su análisis por parte de los docentes.

Al Dr. Luis Manuel Aguayo, mi agradecimiento por la original y sugestiva presentación de la obra.

Asimismo, agradezco a Verónica Arellano, Evelyn Caballero, Margarita Ramírez y Laura Reséndiz por la minuciosa revisión del manuscrito y por las sugerencias para facilitar la comprensión del texto.

A todos, les agradezco infinitamente su ayuda desinteresada.



# PRÓLOGO

Este libro, cuya presentación es al mismo tiempo un placer y un honor hacer, versa sobre las fracciones, uno de los contenidos matemáticos que sin duda genera un gran número de dificultades en su enseñanza y que por ello ha sido objeto de múltiples investigaciones. Su lectura, inevitablemente remite a diversas imágenes que permiten apreciarlo de diferentes maneras; en lo que sigue me permitiré utilizar algunas de esas imágenes para dar cuenta de las virtudes de este texto.

## La trilogía: tres libros, tres saberes, una misma intención

Entre 1993 y 1994, el cineasta polaco Kieślowski filma su famosa trilogía *Azul, Blanco y Rojo* y toma los colores de la bandera de Francia para expresarse sobre la tradición francesa acerca de la libertad, la igualdad y la fraternidad. Tres películas, una historia por cada color y un solo objeto con múltiples significados, la bandera.

El libro que nos ocupa hoy puede pensarse como parte de una trilogía también inscrita en una tradición francesa, la de la escuela de Didáctica de las Matemáticas, específicamente en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau.

La trilogía comienza en 2010 con la aparición de *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*<sup>1</sup>, luego en el 2013 se publica *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria*<sup>2</sup> y en 2022 se completa con *Más de uno, pero menos de dos*. Tres libros, tres saberes distintos todos ligados con la fracción; tres lugares desde dónde pensar la enseñanza (el saber, el alumno y el profesor), y una sola intención, colocar lo didáctico en la dialéctica herramienta /objeto, lo que significa estudiar lo didáctico para convertirlo en una herramienta que permita orientar el proyecto de enseñanza.

Siguiendo esta intención, en *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica* se incluyen elementos para comprender la proporcionalidad directa y su enseñanza, en este caso la noción de razón es el puente entre proporcionalidad y fracción. La misma lógica se observa en *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria*, en donde una vez más, el estudio didáctico de la división, se relaciona con las fracciones a través de una división «que no se puede hacer». La división se convierte en una fuente de problemas de medición, aquellos en los que una determinada cantidad se divide en cierto número de partes, por ejemplo 5 galletas entre 10 personas, y para cuantificar el cociente hacen falta las fracciones: toca  $\frac{1}{2}$  galleta por persona. Pero la división también permite definir las fracciones como cocientes de dos enteros, es decir  $\frac{a}{b}$  es el número que multiplicado por  $b$  da  $a$ , es el cociente de  $a$  entre  $b$ .

A diferencia de los dos primeros libros, *Más de uno, pero menos de dos*, sitúa a la fracción o número racional como su objeto de estudio central y, fiel a la tradición en la que se inscribe, a lo largo de los dos volúmenes que lo componen se van tejiendo los análisis de los procedimientos de los niños,

los fragmentos de clase en los que estos justifican sus procedimientos bajo la guía del profesor, las acotaciones del autor sobre estos hechos, la explicitación de las nociones didácticas puestas en juego, la correspondencia entre noción matemática y situación de aprendizaje. Todas piezas de ese puzzle didáctico cuya intención no es otra que situar lo didáctico en el corazón de la enseñanza. En ese sentido una noción que permite comprender la estructura del libro es la de triángulo didáctico; sus tres elementos, profesor, alumno y saber, se alternan para dar cuenta de las prácticas posibles de alumnos y profesores.

Empero, no debe olvidarse que en la tradición francesa de la Didáctica de las Matemáticas el saber ocupa un lugar central, es su naturaleza la que dota de sentido a los problemas, a las estrategias que los alumnos utilizan para resolverlos y a sus respuestas. El saber matemático, en torno del cual se articula esta obra, está organizado de la siguiente manera: 1) las fracciones y la medida, 2) los decimales y la medida; 3) las fracciones y la división, 4) las fracciones en el papel de razones y 5) fracciones y decimales como operadores multiplicativos. A lo largo de los dos volúmenes de la obra el lector encontrará actividades que puede llevar al aula, también situaciones para analizar y reflexionar sobre la enseñanza de las fracciones durante el trayecto que va desde el tercer grado de la escuela primaria hasta el segundo grado de secundaria.

Sin duda, *Más de uno, pero menos de dos* es la obra mejor lograda de la trilogía, de ello da cuenta su carácter más amplio, no deja problemática alguna ligada a las fracciones sin tocar, y se expresa en un lenguaje claro que no por ello se desprende de la rigurosidad.

## La investigación, los profesores y los formadores

En su libro *Contra la historia oficial* José Antonio Crespo narra una broma que circula entre historiadores, según la cual estos se sumergen en las profundidades de los archivos para desenterrar a la historia misma, pero luego la plasman en gruesos volúmenes tan enojosos e impenetrables por su extensión, especialización y lenguaje erudito, que terminan por ser enterrados en los oscuros estantes de las bibliotecas sin que el público se entere de lo que se descubrió, se comprendió o se revaloró. De esta manera la investigación permanece encerrada en los centros académicos y se separa de la memoria colectiva y social.

Al parecer este fenómeno no es ajeno a la Educación Matemática, la investigación crece exponencialmente y la enseñanza cambia a paso lento, por ello no son pocos los educadores matemáticos que se preguntan si el nivel de especialización de la investigación ha separado sus resultados de la actividad de los profesores, lo que resultaría una paradoja porque el objetivo último de la investigación en Didáctica de las Matemáticas es ayudar a mejorar la enseñanza.

Una virtud de *Más de uno, pero menos de dos*, es que se mueve en el sentido contrario de esta separación puesto que su objetivo es «contribuir a una mejor comprensión de los números racionales, y de la problemática de su enseñanza...», pero no de cualquier manera sino acercando a profesores, formadores y diseñadores de currículo a los conocimientos que sobre el tema se han producido en la esfera de la investigación en didáctica. Esta virtud no es menor, baste recordar que por lo menos desde hace 20 años Brousseau ya postulaba la necesidad de una «didáctica para principiante»<sup>3</sup> para los profesores, que integrara ciertos elementos teóricos y los preparara para la utilización más refinada de los saberes



de la didáctica, garantizando con ello un mejor desempeño profesional.

En este sentido *Más de uno, pero menos de dos*, es un intento bien logrado para cerrar la brecha entre investigación, profesores y formadores. Al organizar los resultados surgidos de la investigación en didáctica sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, se constituye como una herramienta valiosa para diversos agentes educativos porque junto con las situaciones y actividades, también se incluyen conceptos como multiplicidad de problemáticas y significados, obstáculos epistemológicos y didácticos, situación didáctica y adidáctica, institucionalización, contratos, variables didácticas, y formas de validación..., que constituyen la formación teórica que permite al lector dar mayor sentido a las actividades y situaciones, y a sus implicaciones.

### Un libro que se desdobra en múltiples libros

Con la publicación de *Rayuela* en 1963 Julio Cortázar rompe con la estructura convencional de la narrativa y propone —al menos— dos lecturas posibles: una, siguiendo la secuencia lineal de los capítulos que finaliza en el capítulo 56; otra, iniciaría en el capítulo 73 y dando saltos de capítulo en capítulo según un tablero que propone el autor, el lector se encontraría con una historia diferente. Empero, cuando el lector descubre la ausencia del capítulo 55 en el tablero se da cuenta que no solo hay dos lecturas posibles, sino que el libro se desdobra de múltiples maneras para convertirse en muchos libros, y que cada uno puede leerse del mismo modo que se juega la rayuela, dando saltos.

*Más de uno, pero menos de dos*, es un libro que se ciñe a esa misma arquitectura; también da la posibilidad de leerlo

—al menos— de dos maneras distintas. Siguiendo el orden convencional de los capítulos se comprende la lógica del saber matemático, la relación de las medidas con las fracciones y los decimales, sus propiedades y representaciones como subconjunto de los números racionales, la relación entre la división con números naturales y las fracciones, —ya sea en problemas de medición o en los que se requiera definir a la fracción como cociente—, y la multiplicación de fracciones, a la que le da funcionalidad el operador multiplicativo y decimal, son algunas estaciones de dicha ruta y es posible abordarlas desde diferentes flancos.

En la segunda lectura, que no seguiría el orden convencional de los capítulos, se puede ver la secuencia en la que se estudian los racionales en la educación básica y, dependiendo del grado escolar que se quiera analizar, podrán leerse los apartados en los que se incluyen los contenidos propios de un grado, por ejemplo, los profesores de tercero y cuarto grado podrían leer el apartado uno, luego saltar al tres.

Sin embargo, estas no son las únicas lecturas posibles, el texto se multiplica en correspondencia con la mirada que se pose sobre él, la del profesor que busca una mejor comprensión de lo que en términos prácticos significa la funcionalidad del enfoque de la resolución de problemas; la de un colectivo de profesores que pretende mejorar la enseñanza de las matemáticas; la de un profesor que busca situaciones didácticas para llevar a su aula con o sin modificaciones; la de un profesor que busca comprender en términos prácticos las nociones teóricas propias de la didáctica; la de los formadores de docentes que intentan convertir los resultados de la investigación didáctica en una herramienta para la formación; la del estudiante de posgrado que busca situaciones didácticas o situaciones de formación para experimentar; la de los diseñadores de currículo que buscan una mejor forma de

articular los contenidos para plasmarlos en los programas de estudio, entre otras.

En síntesis, *Más de uno, pero menos de dos* es una obra que propone un libre juego entre lector, texto y saber didáctico sobre las fracciones y en ese juego invita a leerse de varias maneras y desde distintas posiciones, es por eso un libro que se desdobra para convertirse en múltiples libros que interpelan e invitan a una cierta mirada, a un cierto lector. En ese sentido el libro no tiene desperdicio y por ello convocamos a los lectores de esta obra, a la elección de la mirada y la adopción del sentido con el que ha de ser leída.

Luis Manuel Aguayo Rendón<sup>4</sup>  
Ciudad de México, marzo de 2021



# INTRODUCCIÓN.

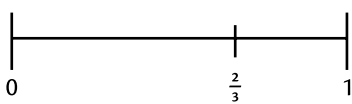
Diversidad de problemas, roles, definiciones, representaciones y tipos de fracciones

Esta obra busca contribuir a una mejor comprensión de los números racionales, y de la problemática de su enseñanza. Está dirigida a docentes de educación básica, a formadores de docentes, a diseñadores de currículo y a investigadores.

A continuación, se da un panorama de los aspectos del universo de las fracciones y los decimales que se abordan en los dos volúmenes que componen la obra.

Las fracciones, como otros conocimientos de matemáticas, se aprenden de manera más significativa si se elaboran como herramientas para resolver determinados problemas. Cuando se analizan los problemas que las fracciones resuelven, se observa, en primer lugar, que hay diferentes tipos de problemas, y que las fracciones juegan **diferentes papeles** en cada **tipo de problema**: pueden expresar medidas, relaciones, operadores multiplicativos, o pueden presentarse como números abstractos. En el cuadro siguiente se dan algunos ejemplos.

En...	La fracción expresa:
«El espesor de una hoja es de $\frac{1}{10}$ de mm»	Una medida de longitud
« $\frac{3}{4}$ de la población vive en el campo» « $\frac{2}{3}$ de la mezcla debe ser de agua»	Una relación entre una parte y un todo (una razón)
El factor de escala del plano es de 0.0025	Un operador multiplicativo.

En...	La fracción expresa:
El número que multiplicado por 4 da 3, es $\frac{3}{4}$	Un cociente
 <p>A horizontal number line segment with vertical tick marks at 0, <math>\frac{2}{3}</math>, and 1. The tick mark at <math>\frac{2}{3}</math> is located two-thirds of the way from 0 to 1.</p>	Un punto en la recta. Un número abstracto.

En cada uno de esos papeles, o roles, las fracciones pueden compararse y sumarse, restarse, multiplicarse, dividirse... aunque, como veremos, algunas operaciones se usan más y se comprenden mejor cuando las fracciones juegan uno de esos roles que cuando juegan otro. Estos distintos roles dan lugar a **distintos significados** de las fracciones (o «constructos», como los llama T. Kieren, 1988).

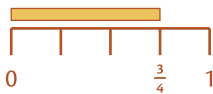
Por otra parte, las fracciones, al igual que muchos otros conocimientos de matemáticas, se pueden definir de distintas maneras. Una manera de generar las fracciones consiste en «quebrar» una unidad en  $n$  partes iguales e introducir fracciones unitarias « $\frac{1}{n}$  de». Luego, introducir fracciones no unitarias como suma de varias unitarias, por ejemplo,  $\frac{3}{4}$  de manzana es  $\frac{1}{4}$  de manzana +  $\frac{1}{4}$  de manzana +  $\frac{1}{4}$  de manzana. La definición que resulta de esta construcción clásica es: « $\frac{3}{4}$  de manzana es lo que resulta de partir la manzana en 4 partes iguales y tomar tres». Una definición distinta, más frecuente en los textos de matemáticas para niveles superiores, consiste en definir a la fracción como un cociente: en este caso  $\frac{3}{4}$  no significa de entrada tres pedazos de  $\frac{1}{4}$ , sino lo que resulta de dividir 3 unidades entre 4, o, dicho de otro modo, es el número que multiplicado por 4 da 3.<sup>5</sup>

Así, hay cierta relación entre los distintos significados que pueden asumir las fracciones y las distintas maneras en que se pueden definir.

## ¿Qué significa $\frac{3}{4}$ ?

Como «partes de unidad» (quebrado)

Lo que resulta de partir una unidad entre 4 y tomar 3 partes



Como «cociente»

Lo que resulta de dividir 3 unidades entre 4



### Fracciones decimales, no decimales y números que no son fracciones

Existe un subconjunto de fracciones, importante por la gran facilidad que presentan para realizar las operaciones. Se trata de las **fracciones decimales**, esto es, las que tienen denominador 10, 100, 1000 o cualquier potencia de 10, por ejemplo,  $\frac{125}{1000}$ . Estas fracciones, además de la facilidad para calcular, presentan otras ventajas: una es que se pueden representar usando la misma notación con la que se escriben los números enteros, la notación decimal (por ejemplo, la fracción  $\frac{125}{1000}$  se puede escribir 0.125). A estos números se les llama «**números decimales**». Hay fracciones que no tienen denominador potencia de 10, pero son equivalentes a una que sí lo tiene, por ejemplo,  $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$ , o bien,  $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$ . A estas fracciones se les puede considerar también como fracciones decimales, o bien, si queremos ser más precisos (a costa de un lenguaje más pesado) se les considerará como «fracciones que son equivalentes a una fracción decimal». Es oportuno recordar aquí que los números naturales (1, 2, 3, ...) son equivalentes a

fracciones, y en particular a fracciones decimales, por ejemplo

$$\frac{3}{1} = \frac{30}{10} = \frac{300}{100}.$$

Por otra parte, no todas las fracciones tienen una equivalente decimal, por ejemplo  $\frac{1}{3}$  no la tiene, no hay ninguna fracción con denominador potencia de 10, que sea equivalente a  $\frac{1}{3}$ . No obstante, es posible encontrar números decimales tan próximos como se quiera a una fracción no decimal, por ejemplo, 0.33, o 0.333 se aproximan a  $\frac{1}{3}$ . Así, para efectos prácticos, cualquier fracción no decimal puede ser sustituida por una decimal, tan próxima a ella como se necesite. Esta es otra gran ventaja de los números decimales.

El conjunto de las fracciones formado por las que son decimales, las que no son decimales, positivas y negativas, constituye el conjunto de los **números racionales**.

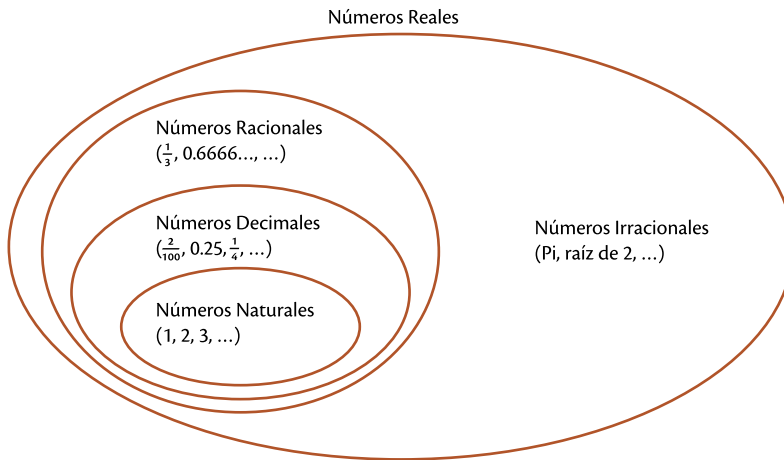
Cabe señalar, por último, y solo para tenerlo presente, que hay números que no se pueden expresar de manera exacta con una fracción (ni por lo tanto con un decimal), por ejemplo, el número de veces que la medida del diámetro de un círculo es igual a su circunferencia (Pi), o la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1. No obstante, esos números se pueden aproximar, tanto como se quiera, con decimales. Son **números irracionales**. Estos números, salvo algunas excepciones como Pi, no se estudian en la escolaridad básica.

Al conjunto que contiene a los números racionales y a los irracionales, se le llama conjunto de los números reales.

Una precisión: ¿debemos hablar de fracciones o de números racionales? El concepto de número racional es más abstracto que el de fracción: puede decirse que un número racional es un conjunto de fracciones equivalentes. El término fracción hace referencia a un objeto singular. Así, podríamos decir que  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{4}$  son dos fracciones (equivalentes), pero ambos son el mismo número racional. En este texto se optará por hablar casi siempre de fracciones<sup>6</sup> excepto cuando sea nece-



sario hacer referencia al conjunto de los números racionales. Esta elección se debe a que en el trabajo que se realizará se pondrán en juego, de entrada, fracciones concretas, ligadas a magnitudes, y no el concepto amplio, formal, de número racional. Este último constituye más bien un punto de llegada, una meta a mediano plazo. No sobra decir que el estudio de las fracciones y los decimales constituye una buena parte del camino para la comprensión del concepto de número racional.



### La enseñanza, el aprendizaje: un recorrido con muchas opciones

Durante la educación básica, se pretende que los alumnos desarrollen un conocimiento cada vez más amplio y profundo de la noción de fracción y de número decimal, que enfrenten nuevos tipos de problemas, que conozcan nuevas definiciones, que se apropien de más significados. A lo largo del recorrido, estudian el orden entre las fracciones, desarrollan formas de resolver las cuatro operaciones, y afirman los algoritmos.

Conocen también al subconjunto de decimales. Finalmente, adquieren un conocimiento de número racional, más abstracto, que abarca a los distintos significados, que fueron desarrollando.

Se trata de un extenso camino con numerosas opciones acerca de por dónde comenzar, con qué seguir, qué conectar con qué, cuánto tiempo destinar a cada fase. Los maestros, los investigadores, los diseñadores de programas y de libros de texto, han explorado distintas alternativas. Ninguna puede considerarse perfecta, y además «la mejor» depende siempre de las condiciones y necesidades de cada profesor y de sus alumnos, pero, sin duda, hay ya numerosos conocimientos que contribuyen a enriquecer y fundamentar una propuesta didáctica.

## Objetivos

- Profundizar en el conocimiento matemático y didáctico de las fracciones y los decimales, destacando algunos de los significados que asumen al funcionar en situaciones específicas, en particular aquellos que son relevantes en la educación básica.
- Identificar vínculos del tema de las fracciones con otros temas de los programas de matemáticas, que juegan un papel en los procesos de construcción de las nociones, principalmente entre fracciones y decimales, medición y proporcionalidad.
- Analizar algunas secuencias de situaciones didácticas diseñadas para favorecer aprendizajes de las fracciones y decimales en sus distintos significados. Analizar lecciones de libros de texto.

- Conocer resoluciones, dificultades y errores de alumnos de primaria y de secundaria frente a los problemas que se están estudiando.

En paralelo con los objetivos anteriores, y de manera integrada con ellos, se persiguen los siguientes objetivos relativos a conocimientos teóricos en didáctica de las matemáticas.

- Abordar la noción de funcionalidad de un concepto y, con relación a esta, la de multiplicidad de problemáticas y de significados.
- Introducir o repasar algunas nociones de la Teoría de las Situaciones Didácticas para el estudio de las situaciones didácticas.

Es importante precisar que la obra no pretende ser un compendio de actividades para llevar a cabo en el aula. Si bien el profesor encontrará aquí numerosas ideas y sugerencias sobre actividades que puede hacer con sus alumnos, el propósito es más bien, como se dijo antes, darle elementos que le ayuden a analizarlas y a diseñarlas.

## Estructura y contenidos

Los capítulos de ambos volúmenes son los siguientes.

Volumen I	Capítulo 1. Las fracciones y la medida
	Capítulo 2. Los decimales y la medida
Volumen II	Capítulo 1. Las fracciones y la división
	Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones
	Capítulo 3. Fracciones y Decimales como operadores multiplicativos

## *Volumen I, Capítulo 1. Las fracciones y la medida*

Revisaremos el significado clásico de las fracciones como partes de unidad; se construyen a partir de iterar la fracción unitaria ( $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \dots m \text{ veces} = \frac{m}{n}$ ). El contexto que da sentido a las fracciones es la medición.

Bajo este significado, y en este contexto, se estudian las nociones de:

- equivalencia;
- fracciones como puntos en la recta;
- orden y operaciones aditivas.

## *Volumen I, Capítulo 2. Los decimales y la medida*

Los decimales constituyen un subconjunto de los racionales, aquellos de la forma  $\frac{n}{10^m}$ . Estos números, aunque comparten los mismos significados que las fracciones en general (expresiones de medidas, en la recta numérica, expresiones de operadores, etc.), presentan una serie de particularidades que ameritan un espacio aparte. En este apartado, se estudiarán los siguientes aspectos:

- las fracciones decimales como subconjunto de los racionales; la notación decimal;
- representaciones de los decimales (en la recta, mediante la longitud, mediante superficie);
- orden, propiedad de la densidad, ubicación en la recta numérica, operaciones aditivas;
- aproximación decimal a fracciones no decimales.

## *Volumen II, Capítulo 1. Las fracciones y la división*

La división de números naturales está relacionada estrechamente con las fracciones. Por una parte, es una fuente importante de problemas en los que una determinada cantidad (3 metros, 5 galletas, 2 kg, etc.) se divide en cierto número de partes e interesa cuantificar el cociente (3 metros de listón divididos en 5 partes iguales para hacer moños, da a  $\frac{3}{5}$  de metro por moño). En este caso, las fracciones expresan medidas, y siguen siendo «partes de unidad». La división juega como problemática generadora.

Por otra parte, la división puede dar lugar a una definición de las fracciones como cocientes de dos enteros. La fracción  $\frac{a}{b}$  es el número que multiplicado por  $b$ , da  $a$ . Es decir, es el cociente de  $a$  entre  $b$ . En este caso la división constituye un significado de las fracciones, como cocientes de enteros.

Se estudiará, además, la problemática del tránsito del significado de las fracciones como partes de unidad a su significado como cociente. Se mencionará un problema curricular actual en el que ambos significados existen, uno en primaria, y el otro en secundaria, ignorándose uno al otro.

## *Volumen II, Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones*

Una expresión como « $\frac{3}{4}$  de la mezcla es de pintura roja», no da información acerca de la cantidad de pintura roja que se debe poner, sino de la relación que debe haber entre la cantidad de pintura y el total de mezcla. Este tipo de relaciones se llaman razones. Expresar razones constituye uno de los roles fundamentales de las fracciones. Las razones están en la base de numerosos conceptos más, como el de cantidad relativa, tasa, índice, porcentaje...

Además de lo anterior, la fracción, en su papel de razón, es una pieza angular en la construcción de la noción de multiplicación de fracciones.

En este capítulo se incluyen los siguientes dos apartados:

- las razones « $a$  por cada  $b$ », precursoras de las fracciones;
- la emergencia de las fracciones « $\frac{a}{b}$  de», como expresiones de razones « $a$  por cada  $b$ ».

### *Volumen II, Capítulo 3. El operador multiplicativo fraccionario o decimal*

La multiplicación por fracciones y decimales constituye uno de los aspectos de la aritmética básica más difíciles de comprender para los estudiantes, pues la multiplicación pierde propiedades que tenía en los naturales y que fueron implícita o explícitamente estudiadas a lo largo de varios años, sobre todo el hecho de ser una transformación que «agrand», y que se puede interpretar como una suma repetida. Por ello, se propone un conjunto amplio de actividades en el que la noción de multiplicación por fracciones y decimales se «estudia» desde distintos flancos, durante varios años de la educación básica.

En este capítulo se incluyen los siguientes aspectos:

- la multiplicación de fracciones en el contexto de la proporcionalidad;
- la multiplicación de fracciones y decimales en el cálculo del área del rectángulo;
- la división de fracciones y decimales.

*El orden de los contenidos en la presente obra no es el orden de enseñanza*

El orden en que se presentan los distintos aspectos de las fracciones en los dos volúmenes de esta obra, no es el orden en que se estudian en la escuela.

En cada capítulo hay aspectos que se pueden ver en distintos grados de la primaria y de la secundaria. En la siguiente tabla se presenta una relación de los temas que se abordan en cada capítulo con su posible estudio en los distintos ciclos escolares.

**Una ruta posible para estudiar los números racionales durante la educación básica**

Volumen I	3° – 4° (primaria)	5° – 6° (primaria)	7° – 9° (secundaria)
<b>Capítulo 1</b> Las fracciones y la medida	Fracciones $\frac{m}{n}$ para medir (longitud, superficie, peso). Relación parte todo. Recta numérica. Equivalencia, orden, suma.	Lo mismo que en 3° – 4°, pero con fracciones de cualquier denominador.	Recta numérica. Densidad. Cambios de unidad y Cambios de notación.
<b>Capítulo 2</b> Los decimales y la medida		Fracciones decimales para medir. Expresión decimal aplicada en medidas de longitud, área, peso.	Además de lo que se ve en 5°-6° (casillero de la izquierda): recta numérica, densidad, cambios de unidad, cambios de notación.

Volumen II	3º – 4º (primaria)	5º – 6º (primaria)	7º – 9º (secundaria)
<b>Capítulo 1</b> Las fracciones y la división	Repartos entre 2n. Repartos entre 3. Resultados distintos pero equivalentes de un mismo reparto. (Tema 1)	Algoritmo « $a$ unidades entre $b = \frac{a}{b}$ de unidad». Divisiones de otras magnitudes. (Tema 2)	Dos definiciones explícitas: como partes de unidad y como cocientes. (Temas 2 y 3)
<b>Capítulo 2</b> Las fracciones en el papel de razones		Se comparan razones, sin fracciones. Problemas de cuarta proporcional sin fracciones. (Tema 1)	Se expresan razones con fracciones, en situaciones de comparación y de cuarta proporcional. (Temas 1 y 2)
<b>Capítulo 3</b> El operador multiplicativo fraccionario y decimal		Se aplican operadores fraccionarios sencillos en situaciones de proporcionalidad.	La fracción « $\frac{a}{b}$ de», como multiplicación $\times \frac{a}{b}$ . La relación $1 \rightarrow \frac{a}{b}$ como multiplicación $\times \frac{a}{b}$ . El área de rectángulo de dimensiones $\frac{a}{b}$ , $\frac{c}{d}$ como multiplicación. La división, como inversa de la multiplicación.

Además, en los capítulos se indica para qué grados pueden ser adecuadas las actividades que se proponen, o las recomendaciones que se hacen. En el volumen II hay actividades que son exclusivamente para el nivel de secundaria. Para facilitar la detección del nivel recomendado, en ese volumen se utilizan los indicadores «Primaria», «Secundaria» o «Primaria y Secundaria».



*Los tipos de actividad, la estructura del libro, las distintas secciones*

Para facilitar el estudio de temas de matemáticas y de su didáctica, en los dos volúmenes de esta serie se optó por un formato que alterna numerosas actividades diseñadas para profesores, con información práctica y teórica sobre los aspectos que son motivo de estudio. Las actividades son de muy diversa índole: se plantean problemas de matemáticas, se analizan lecciones para alumnos de primaria y de secundaria, se revisan programas escolares, se analizan producciones de alumnos y fragmentos de clases. Cabe señalar que una gran parte del material que se presenta es producto de investigaciones en el tema.

Casi todas las actividades (ejercicios, problemas, u otras) se presentan con las respuestas o soluciones, ya sea después de la actividad, o bien en el solucionario que se incluye al final de cada volumen. En la versión digital se puede consultar la respuesta haciendo clic en la etiqueta **SOLUCIONARIO**. Así mismo, para regresar del solucionario al texto, basta con dar un clic al título de la actividad que se consultó en el solucionario.

Casi todas las actividades pueden ser adaptadas para implementarse en el aula, con los alumnos, además se sugiere llevar a cabo algunas, y si es posible, compartir la experiencia con otros docentes, como parte del proceso de estudio. Estas actividades vienen señaladas con la leyenda **AULA**.

Hay algunas secciones en algunos capítulos en los que se ofrece una profundización, casi siempre sobre algún aspecto de matemáticas. Se señala con la etiqueta **PROFUNDIZACIÓN**. Los lectores pueden abordar estas secciones en el momento en que las encuentren, o dejarlas para una ocasión posterior.

## ¿Cómo estudiar el contenido de esta obra?

Esta obra se elaboró en forma de un taller, con numerosas actividades. Es, por lo tanto, un libro en el que se alternan los momentos de leer y resolver, y a veces también momentos de implementar en clase, observar y tomar notas.

Aunque se puede estudiar de manera individual, se recomienda hacerlo en grupo, al menos con un colega. De esta manera la experiencia se puede enriquecer significativamente al permitir entablar discusiones, hacer comparaciones de procedimientos y resultados, realizar actividades en colectivo (los juegos, por ejemplo).

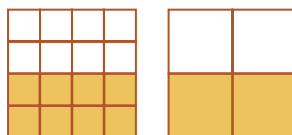
Puede haber partes de la obra que le parezcan difíciles, se le recomienda que las deje pendientes, continúe con la actividad siguiente, o incluso el tema siguiente, y más adelante regrese a esas actividades, o regrese a ellas cuando pueda hacerlas con algún colega. Con los conocimientos que usted tiene, podrá abordar los distintos capítulos en cualquier orden.

Confiamos en que su viaje a través de los cinco capítulos, le resultará útil para llevar a cabo sus clases sobre fracciones y decimales; para analizar las conexiones entre estos y otros temas del currículo; para evaluar y adaptar las propuestas que se hacen en los diferentes materiales, oficiales o de editoriales privadas; para diseñar usted mismo actividades; y para analizar las producciones de los alumnos, sus errores, dificultades y logros. Esperamos también que disfrute la experiencia de estudiarlo, al descubrir otras facetas poco conocidas del tema, y maneras gratificantes «de hacer matemáticas».

## Capítulo 1.

### Las fracciones y la división

En una clase de segundo grado, los alumnos observan dos formas de repartir un pastel entre dos niños:



*Observador: Si se comen el pastel, ¿quién va a comer más?*

*Olmo: Este (el de la izquierda) tiene más porque tiene ocho y este menos porque son dos (se refiere a los  $\frac{8}{16}$  y los  $\frac{2}{4}$ ).<sup>7</sup>*

Alumnos de quinto grado tratan de calcular cuánto mide un paso de un robot que, con 7 pasos, se avanza 9 unidades. Por ensayo y error encuentran que si el paso midiera  $1\frac{1}{4}$ , faltaría; y si midiera  $1\frac{1}{3}$ , sobraría:

*Observador: Entonces... ¿cuánto tendría que ser? (...)*

*Juan: Un paso y un quinto (...).<sup>8</sup>*

## Introducción

Así como la acción de medir puede llevar al fraccionamiento de unidades, también la acción de *repartir* lo hace, de una manera incluso más explícita. Los problemas que implican «repartir en partes iguales» constituyen una clase de problemas de división que brindan otra ocasión para usar y estudiar a las fracciones.<sup>9</sup> En este capítulo veremos estos problemas, analizaremos algunas de sus variables didácticas, algunas producciones de los alumnos y su evolución.

Otra razón de ser de las fracciones, esta vez de índole matemática, es la siguiente: en los números naturales hay divisiones cuyo cociente es un número natural, y el residuo es cero, por ejemplo,  $6 \div 2$ ;  $12 \div 3$ ;  $30 \div 5$ , etc., y divisiones como  $7 \div 4$ , cuyo cociente exacto no es un número natural. Así, las fracciones permiten que todas las divisiones de números naturales —excepto entre cero— tengan un cociente. Por ejemplo, el resultado de dividir 7 unidades entre 4 es  $\frac{7}{4}$  o  $1\frac{3}{4}$  de unidad, por lo que se puede escribir  $7 \div 4 = \frac{7}{4}$ .

Cabe señalar que la división, además de ser una rica fuente de problemas que requieren usar fracciones, guarda otra relación importante con ellas: la fracción  $\frac{7}{4}$ , por ejemplo, se puede *definir* como el número que multiplicado por 4 da 7, es decir, como el *cociente* de 7 entre 4. La relación entre esta definición de las fracciones «como cocientes» y la de partes de unidad o «quebrados»<sup>10</sup> que vimos en el capítulo 1 del volumen I (en la que « $\frac{7}{4}$ » de unidad significa «7 veces  $\frac{1}{4}$  de unidad») no es evidente, y sin embargo no suele ser objeto de estudio explícito en la escuela. Cuando los alumnos entran a la secundaria, se encuentran con que el símbolo que ellos asocian a las fracciones  $\frac{a}{b}$  (como  $a$  veces  $\frac{1}{b}$  de unidad) se usa también para representar a la división  $a \div b$ , o al cociente de

esta; o incluso, con la novedad de que el cociente  $a \div b$  y la fracción  $\frac{a}{b}$  se consideran, en ciertas circunstancias, el mismo objeto. Para conciliar las dos definiciones, como cociente y como partes de unidad, se requiere un trabajo didáctico.

## **Tema 1. El reparto en los primeros grados de la primaria**

En el marco de un trabajo de investigación<sup>11</sup>, se plantearon actividades relativas a tareas de reparto a alumnos de primero a tercer grado de primaria. A continuación, se presentan algunos de los resultados obtenidos. Se intercalarán preguntas para ayudar al docente a analizar la información.

### **1.1 Primera tarea: repartir entre 2 y entre 4**

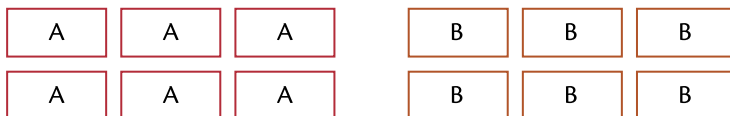
Los alumnos de un grupo de primer grado de primaria, organizados en equipos de dos o cuatro, realizaron una actividad que consistía en repartirse cierto número de pasteles (hojas de papel tamaño carta) entre ellos de manera que a cada uno le tocara lo mismo y no sobrara pastel.

Se observó que casi todos los niños pudieron hacer bien los repartos. Hicieron cortes a la mitad, a la mitad de la mitad, etc. Por ejemplo, para repartir 3 pasteles entre 2 niños aparecieron los repartos que se muestran en la figura 1. Los dos niños entre quienes se reparte se indican con las letras A y B.

Forma de reparto 1 (un entero un medio a cada niño)



Forma de reparto 2 (seis cuartos a cada niño)



Forma de reparto 3 (tres medios a cada niño)



Forma de reparto 4 (cuatro pedazos desiguales a un niño y dos a otro)

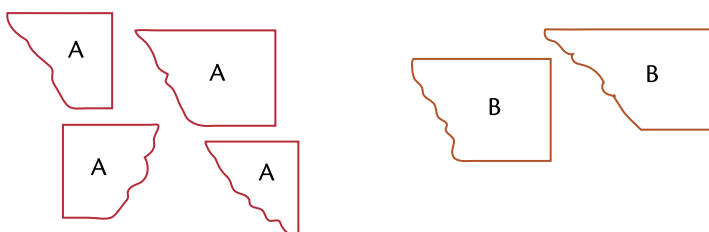


Figura 1. Tipos de reparto para «tres pasteles entre dos niños»

Con respecto al reparto tipo 4, Dávila (1992) explica:

*Uno de los equipos de primer año hizo el reparto tipo 4. El grupo no lo aceptó como bueno, argumentando que no estaba bien porque a un niño le había tocado más pastel: uno tenía cuatro pedazos y el otro solo dos. Al preguntar el observador qué se podía hacer para que les tocara lo mismo, una niña respondió: pasándole un pedazo al otro niño; lo hace y el grupo acepta entonces que así a los dos niños les ha tocado lo mismo, tres pedazos. (p. 36)*

### Actividad 1.1

#### ¿Entre más pedazos más pastel?

- a) ¿En qué casos lo que le toca a un niño es equivalente a lo que le toca al otro?
- b) ¿Qué opina del criterio que usaron los niños para corregir el reparto, a saber, que a todos les toque el mismo número de pedazos? Complemente su respuesta con lo que se explica en el siguiente texto.

#### *Relación inversa entre dos variables: entre más pedazos, más pequeños*

En esta situación hay dos datos que varían de manera inversa, el número de pedacitos en que se divide una cantidad y su tamaño: entre mayor es el número de pedacitos, menor es el tamaño de cada pedacito. Por su parte, la cantidad total no cambia. Puede observarse que los niños se centran en una variable (número de pedazos) y dejan de lado la otra (el tamaño de los pedazos), por eso no se dan cuenta de que la cantidad total no cambia.

#### *¿Cuándo y cómo introducir la escritura de las fracciones?*

Cabe señalar que a los alumnos de primero y segundo grado no se les pidió expresar oralmente las fracciones, y, menos aún, escribirlas. Como pudo verse, no necesitaron esas representaciones para enfrentar los retos que se les pusieron.

En tercer grado, una vez que los alumnos hacen los repartos y están de acuerdo en que son correctos, se les puede sugerir la tarea de escribir con fracciones la parte que le tocó a cada niño. Si ya empezaron a usar fracciones para expresar

cantidades en situaciones de medición, simplemente se retoman aquellas fracciones («¿Se acuerdan cómo representamos una parte que cabe dos veces en el entero?,  $\frac{1}{2}$ », etc.). Si esta es la primera vez que los alumnos van a escribir fracciones, se introducen, en un primer momento, las unitarias (numerador 1). Surgirán escrituras aditivas como las siguientes:

$$1\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Es un buen momento para destacar con los alumnos que todas esas escrituras corresponden a la parte de pastel que le tocó a cada uno de los niños, y por eso son equivalentes.

Más adelante, se pueden introducir las fracciones no unitarias, a partir de las unitarias, por ejemplo,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  se escribe también  $\frac{3}{2}$ .

## 1.2 Segunda tarea: repartir entre 3

Ahora se trató de hacer un reparto de dos pasteles entre tres niños.

Dice la autora (Dávila, 1992, p. 36):

*La tendencia de partir por mitades propició que los alumnos tuvieran éxito en sus repartos entre 2 y entre 4 (...). Dicha tendencia y la falta de conciencia de los resultados que obtendrían se manifiestan con más claridad cuando realizan repartos entre tres, en donde encontramos que:*

- *Solo un equipo de segundo año parte en tres sus enteros para hacer el reparto.*
- *Los demás equipos utilizan la estrategia de partir por mitades para realizar los repartos entre tres: parten la hoja a la mitad, y luego nuevamente a la mitad, obtienen 4 cuartos. Asignan tres de ellos, uno a cada niño, y el que*



sobra, de nuevo lo parten dos veces a la mitad, con lo que obtienen dieciseisavos. Asignan uno a cada niño, con lo que a cada niño le tocó, implícitamente,  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ , pero... les vuelve a quedar uno. (Ver figura 2).

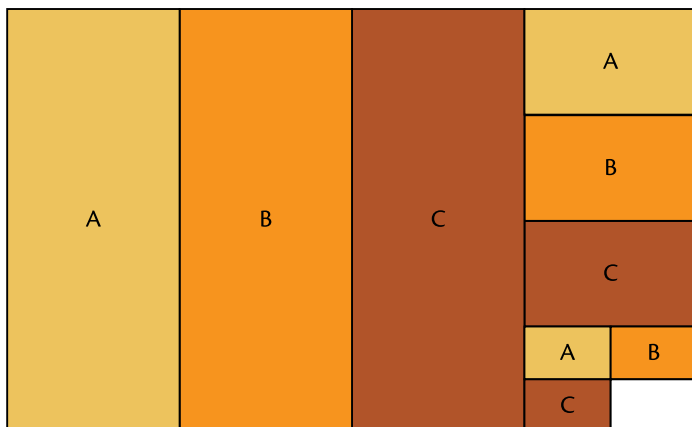


Figura 2. Reparto de un pastel entre tres, partiendo por mitades

Tras darse cuenta de que con esta estrategia —la bipartición— siempre les va a sobrar un pedazo, tienen reacciones diversas:

(...) se deshacen de él [se refiere al pedazo], escondiéndolo, tirándolo e incluso, un niño de primero para desaparecerlo, se lo traga. Estos niños argumentan que ese pedazo ya no se puede repartir o que ya no vale (Dávila, 1992, p. 37).

## Actividad 1.2

### ¿Por qué es difícil repartir?

Explique con sus palabras la dificultad de los niños para hacer un reparto equitativo (en partes iguales) y exhaustivo (sin que sobre). ¿A qué cree que se debe? Complemente su opinión con lo que se dice en el texto que sigue.

### *La dificultad de partir en un número de partes distinto a $2^n$*

Los alumnos al principio no prevén una forma de partir, simplemente realizan biparticiones. Esta es la primera forma de partición que dominan (al doblar por la mitad no es necesario prever en dónde va la línea divisoria, esta se obtiene al doblar la hoja haciendo coincidir los dos extremos). Cuando el reparto no es entre  $2^n$  (2, 4, 8...) sino entre 3, por ejemplo, no prevén que la bipartición no les permitirá repartir exhaustivamente. La partición entre tres requiere de una previsión, de una planificación consciente de cómo hacer la partición<sup>12</sup>.

Alumnos más grandes, de cuarto o quinto grado, pueden descubrir una estrategia, o apropiarse de ella, para obtener tres partes aproximadamente iguales, que consiste en marcar (o cortar, o doblar) un pedazo que sea del doble de tamaño del que queda. Luego, ese pedazo se divide en dos.



### **1.3 Tercera tarea: comparar resultados de un mismo reparto**

Una vez que los equipos resolvieron un mismo reparto de diferentes maneras, como las que se ilustraron en la figura 1 y tras verificar que se repartió todo y en partes iguales, se les pidió que compararan la parte que le tocó a un niño de un equipo, con la que tocó a un niño de *otro* equipo. Primero se propició un diálogo para que los niños dijeran lo que pensaban, luego se les dieron los pedazos para que pusieran a prueba sus afirmaciones. Se identificaron varios tipos de razonamientos. A continuación, se muestra, a título de ejemplo, el reparto de

un pastel entre dos (ver figura 3). En un equipo partieron en cuartos (dieron  $\frac{2}{4}$  a cada uno), y en el otro en 16<sup>avos</sup> (dieron  $\frac{8}{16}$  a cada uno).

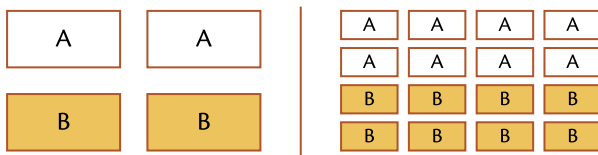


Figura 3. Dos maneras de dar un medio:  
dos cuartos, u ocho dieciseisavos

1. Observador: Ahora pase el equipo dos.
2. Olmo: Este tiene más porque tiene ocho y este menos porque son dos. (Se refiere a los pedazos de  $\frac{1}{16}$  y a los 2 pedazos de  $\frac{1}{4}$ ).
3. Observador: Si se comen el pastel ¿quién va a comer más?
4. Equipo: Los que tienen ocho.
5. Observador: ¿Ustedes qué piensan? (pregunta al grupo), ¿quién se llenaría más pronto si se comen el pastel, el niño que tiene dos pedazos o el que tiene ocho?
6. Niños: El que tiene ocho.
7. Carlos: (Con tono de obviedad) Es lo mismo. Se llenarían igual.
8. Niños: No, se llenaría más el que tiene ocho pedazos.
9. Observador: A ver, pasa el equipo uno.
10. (Carlos y Silvia traen sobre un cuaderno  $\frac{1}{4}$  de hoja y sobrepuestos  $\frac{4}{16}$ . Lo muestran a sus compañeros).
11. Observador: A ver, explíquenlo.
12. Carlos: Estos, si los doblamos y los cortamos (muestra  $\frac{1}{4}$ ) en cuatro pedacitos quedan igual (muestra los  $\frac{4}{16}$  encimados en el cuarto).
13. Observador: (Pregunta a Carlos) ¿Si los cortamos se hace más o menos?

14. Carlos: *Queda igual (dice enojado y continúa). Si les da cinco pasteles a un equipo y seis pasteles a otro, entonces sí gana el de seis, pero si nos da a todos un mismo pastel, entonces nos toca igual y nadie gana.*

### Actividad 1.3

#### Dos pedazos no puede ser lo mismo que ocho pedazos

Analice las siguientes cuestiones y lea el texto que se propone enseñar.

¿Por qué no es obvio para los niños que las dos cantidades ( $\frac{2}{4}$  y  $\frac{8}{16}$ ) deben ser iguales?, ¿Qué se necesita saber para poder anticipar esa igualdad?

#### *Compensar dos variables...*

Como ya vimos, están en juego dos variables que se compensan: cantidad y tamaño de los pedazos. Al parecer, en cierto momento de su desarrollo, los niños solamente consideran una variable, como Olmo, quien se centra en el número de pedazos para concluir que donde hay 8 hay más que donde hay 2, sin fijarse en el tamaño de los pedazos (renglón 2). Cuando se les dan los pedazos para que verifiquen, algunos niños, como, Silvia y Carlos (renglones 10 y 12), sobreponen los 4 pedazos de  $\frac{1}{16}$  en el pedazo de  $\frac{1}{4}$  y, al ver que coinciden, se convencen de que en ambos repartos hay la misma cantidad de pastel. Es decir, a estos niños la prueba empírica, con material, les permite establecer la relación correcta entre ambas cantidades<sup>13</sup>.

Finalmente, el razonamiento más avanzado lo ejemplifica Carlos, en su intervención del renglón 14. Él anticipa que la porción que le toca a un niño solamente puede ser mayor que

la que le toca a otro niño si se aumenta la cantidad de pasteles a repartir, conservando la cantidad de niños. Este alumno ya está seguro de que, si las cantidades iniciales que se van a repartir son las mismas y si los repartos se hacen bien, a un niño de un equipo le tocará lo mismo que a un niño de otro equipo, *sin importar qué forma tengan las porciones* y sin importar de cuántos pedazos estén formadas. Carlos ha construido una relación que le permite anticipar esa igualdad, sin necesidad de ver, de verificar. La relación se puede expresar así:

Dos o más repartos en los que se reparte equitativa y exhaustivamente la misma cantidad, entre el mismo número de partes, arrojan porciones iguales.

O también así:

Si  $A$  y  $A'$  son dos cantidades que se reparten en  $n$  partes iguales, y  $P$  y  $P'$  son los pedazos por persona que resultan de esos repartos, se tiene que:

$$n \times P = A \quad \text{y} \quad n \times P' = A'$$

Si  $A$  y  $A'$  son iguales, entonces, necesariamente  $P$  y  $P'$  lo son también.

### Actividad 1.4

#### Una cosa es repartir y otra usar fracciones

Reflexione sobre las siguientes cuestiones relacionadas con las experiencias de reparto que se presentaron. Después, complemente y contraste sus puntos de vista con la información que se le presenta.

- ¿Se necesita un conocimiento previo de fracciones para resolver estos problemas de reparto?
- ¿Qué aprenden los niños al realizar estos repartos? ¿Qué aspectos de las fracciones pueden aprender y cuáles no?

### *El reparto en el primer ciclo de primaria*

Como se pudo apreciar, los alumnos de primer ciclo (primero y segundo grados), así como los de tercer grado, no necesitaron un conocimiento previo de fracciones para resolver los problemas de reparto que se les plantearon. De hecho, en toda la experiencia que se acaba de revisar, las fracciones no se escribieron, ni se mencionaron.

Entonces, ¿qué pueden aprender los alumnos al realizarlas? En el primer ciclo (primero y segundo grado de primaria) las experiencias de reparto pueden ser útiles para que los alumnos aprendan a hacer repartos equitativos y exhaustivos, poniendo en juego las biparticiones. Por ello es conveniente que los repartos sean entre potencias de 2 (2, 4, 8,...). Pueden hacer repartos de uno o de varios enteros, con un resultado mayor o menor a un entero. Estos repartos también son muy adecuados para tercer grado.

Los otros dos problemas, el de buscar formas de repartir entre 3, y, más aún, el de comparar las cantidades obtenidas mediante dos maneras de repartir, pueden ser adecuados de tercer grado en adelante. Si bien en la experiencia anterior vimos a algunos alumnos de primer ciclo enfrentarlas con éxito, no dejan de ser excepcionales.

Con respecto a la introducción de los nombres de las fracciones, y de su escritura, se recomienda esperar hasta el tercer grado. Comprender que una notación (por ejemplo  $\frac{1}{2}$ ) formada por dos números («1» y «2») expresa *una* cantidad y no dos, es difícil, más cuando los alumnos están en proceso de afianzar su conocimiento de los primeros números naturales. Además, ¿cómo comprender que  $\frac{1}{2}$  es equivalente a  $\frac{2}{4}$  cuando para ellos cuatro pedacitos son más que dos pedacitos? Más adelante, a partir de tercer grado, dedicarán tiempo a estudiar la escritura de las fracciones. Como ya se comentó anterior-

mente, tanto las situaciones de medición como las de reparto, constituyen buenas ocasiones para que los alumnos, a partir de tercer grado, expresen resultados de medir, y de repartir, mediante fracciones, orales y escritas, y mediante expresiones aditivas de fracciones.

### Actividad 1.5

#### ¿Se puede repartir entre 3 partes mediante biparticiones? PROFUNDIZACIÓN

Explore el siguiente problema.

Como se vio, los alumnos tienden a resolver los repartos mediante biparticiones, es decir, particiones sucesivas entre 2. Pero ¿se puede formar un pedazo de  $\frac{1}{3}$  de hoja con pedazos generados por biparticiones (particiones a la mitad)? Por ejemplo, con  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ , falta; con  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  se pasa. [SOLUCIONARIO](#)

## Tema 2. Diversidad de situaciones de reparto

Cuando se habla de reparto se consideran, en general, problemas de repartir cierta cantidad, por ejemplo, de chocolates, entre otra cantidad, por ejemplo, de niños. Se verán ahora algunas variantes de ese problema que ayudan a los alumnos a profundizar sus conocimientos sobre fracciones, aun cuando se trabaje con un grupo reducido de fracciones como medios, cuartos y tercios.

Ya se vio en el tema anterior que hay variaciones aparentemente pequeñas, como la de cambiar la cantidad de niños entre los que se hace un reparto, que tienen un efecto grande en la dificultad y en el procedimiento que se desarrolla<sup>14</sup>. Hay otras variaciones en las que se cambia la tarea misma, por





ejemplo, cuando se trata ya no de resolver, sino de verificar cuál es la respuesta correcta, entre varias que se dan. Finalmente, hay problemas que, aun siendo dentro del contexto de reparto, plantean una tarea nueva, por ejemplo, problemas de comparación, o de reconstrucción del entero. A continuación, se analizarán algunas de estas variantes.

AULA  
4º, 5º

### Actividad 1.6

#### Analizar una lección de un libro de texto<sup>15</sup>

- a) En la lección que se presenta enseguida (figura 4) se plantean diferentes tareas para alumnos que inician el cuarto grado. En el ejercicio **2a** se da una cantidad de alfajores (golosina tradicional argentina) que será repartida entre distintas cantidades de niños: 3, 6, y 4. Si se piensa en alumnos de cuarto grado, es previsible que no tendrá la misma dificultad repartir 9 alfajores entre 3 niños, que entre 6 o entre 4, aunque se conserve la cantidad total de alfajores. ¿Cuáles podrían ser las diferencias de dificultad? [SOLUCIONARIO](#)
- b) Después de resolver todos los incisos de los ejercicios 2 y 3 de la lección, identifique y describa las tareas que se plantean, así como las diferencias con la actividad **2a**. Enseguida, complementa sus observaciones con las que se presentan en el [SOLUCIONARIO](#).

-  Se quieren repartir 9 alfajores de manera que cada niño reciba la misma cantidad y no quede nada sin repartir.
- a) Si hay 3 niños, ¿cuántos alfajores le tocan a cada uno? \_\_\_\_\_
-  ¿Y si hay 6 niños? \_\_\_\_\_
-  Y si hay 4, ¿cuánto le toca a cada niño? \_\_\_\_\_
-  **Escribí o dibujá** cómo hiciste el reparto de los alfajores entre los 4 niños.





- b) En el reparto de 9 alfajores entre 4 niños, ¿puede ser que a cada uno le correspondan 2 alfajores y la cuarta parte de otro alfajor? .....
- c) Ana realizó el reparto de esta manera. ¿Cómo puede escribir con números lo que le toca a cada uno? .....

Como hay 4 niños, divido cada alfajor en cuatro partes iguales y le doy una de esas partes a cada uno.



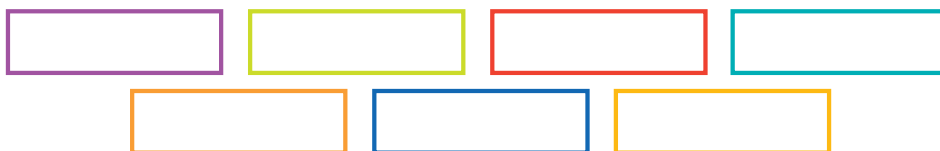
Si se reparten 9 alfajores entre 4 niños, a cada uno le tocan 2 alfajores y la cuarta parte de otro. Esa cantidad se puede escribir de distintas maneras:

$$2 + \frac{1}{4} \qquad \frac{9}{4} \qquad \frac{4}{2} + \frac{1}{4}$$

Estas son expresiones equivalentes.

3 Tres chicos se reparten 7 chocolates en partes iguales.

- a) ¿Qué cantidad le toca a cada uno? .....
- b) **Representá** en estos rectángulos el reparto que hiciste.



- c) ¿Cuáles de estas expresiones representan la cantidad de chocolate que le tocó a cada uno?

$$1 + \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad 7 + \frac{1}{3} \qquad 2 + \frac{1}{3} \qquad 1 + 1 + 3 \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Figura 4. Hacer matemáticas 4. Ficha 35. Saiz y Parra, 2013, pp. 108-109.

### *Diversidad en las tareas de repartir*

En la lección anterior hay una gran variedad de tareas, por ejemplo, determinar cuánto le corresponde a cada niño en distintos repartos (9 alfajores y 3, 6 o 4 niños o 7 chocolates y 3 niños); escribir numéricamente una expresión dada en forma verbal; seleccionar entre varias expresiones numéricas la que corresponde a un cierto reparto; validar si un resultado de un reparto es correcto o no; explicar la forma de realizar un reparto, a partir de la escritura numérica de lo que le toca a cada niño; encontrar y dibujar en un cierto esquema, el reparto realizado, etc. Puede notarse que no solamente las tareas son distintas, también los tipos de interacción: se actúa para hacer un reparto, se formulan y explican procedimientos, se validan resultados.

#### **Actividad 1.7**

#### **¿Cuál de dos repartos arroja pedazos más grandes?**

Los problemas de comparación de resultados de dos repartos constituyen otra tarea interesante desde el punto de vista de los aprendizajes que pueden propiciar.

En una investigación<sup>16</sup>, se plantearon tareas de comparación de repartos para algunos alumnos de 3º, 4º y 5º de primaria. Se buscaba analizar el efecto de ciertas variables, sobre los procedimientos de los alumnos. Se confirmó que, en efecto, a veces los alumnos cambian de procedimiento cuando se modifican ciertas características de los problemas, pero también se observó que los cambios de procedimiento ocurren de un alumno a otro, con el mismo problema. En estos casos, son los conocimientos de cada alumno, y no las características del problema, lo que determina el procedimiento.

A continuación, se presentan las resoluciones de algunos de los alumnos al siguiente problema:

- En la mesa E se reparte 1 pastel entre 3 niños, y en la mesa F se reparten 2 pasteles entre 7 niños. ¿A los niños de qué mesa les tocó un pedazo más grande?

Se aclaró desde el principio que en cada mesa el reparto fue equitativo y exhaustivo.

Analice las resoluciones que hicieron los alumnos y explique la diferencia entre las dos primeras y las dos últimas. Complemente su punto de vista con la explicación que se proporciona en el [SOLUCIONARIO](#).

15. Itzel (4°)

Primero dibuja el pastel de la mesa E y a un lado los dos pasteles de la mesa F. Después divide los dos últimos pasteles en 7 partes cada uno y el pastel de la mesa E en 3 partes.

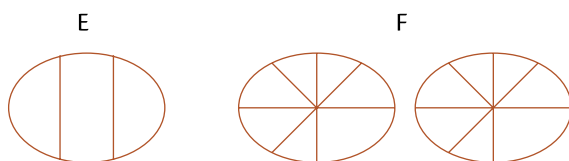


Figura 5. Resolución de Itzel

*La mesa E, porque aquí les va a tocar un cacho más grande, porque son menos niños y en la F les va a tocar menos porque son más niños (...)*

16. Arturo (4°)

Inmediatamente responde:

*En la mesa E (...) porque aquí (E) es un pastel y nada más le toca un tercio. Y aquí en la F hay 2 pasteles para 7 niños y sería, este, 2 séptimos (...) dos séptimos, es más. ¡Ah no!, entonces es la F, porque dos séptimos es más grande que un tercio (...) ¡Sí es en la E! (...) porque se parte en 3 y no en 7 que son más cortas las rebanadas.*

Decide entonces hacer una representación con dibujos.

*Estos dos pedazos (señala los séptimos) apenas igualan, no lo igualan a uno de estos ( $\frac{1}{3}$ ) (...) Es que aquí ( $\frac{1}{3}$ ) se parte en tercio y aquí ( $\frac{1}{7}$ ) lo estamos partiendo en más.*

Finalmente, opta por comparar  $\frac{1}{3}$  con  $\frac{1}{7}$  de una manera original:

Divide un pastel en séptimos; encima, marca los tercios, considerando dos séptimos por cada tercio. Le sobra un séptimo, el cual divide en tres para asignar cada 21<sup>avo</sup> (al que llama «punto decimal») a cada uno de los tercios. Encuentra, con dibujos, que  $\frac{1}{3} = \frac{2}{7} + (\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{7})$ , pero interpreta de manera errónea este hallazgo y concluye que  $\frac{2}{7}$  es mayor que un tercio (ver figura 6).

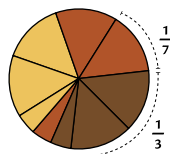


Figura 6. Resolución de Arturo

17. Nancy (6°)

*En la mesa E (...) Porque si tuviéramos 2 pasteles en la mesa E serían 2 pasteles para 6 niños y en la mesa F hay 2 pasteles para 7 niños*

18. Adriana (5°)

Contesta inmediatamente:

*En la E (...) porque aquí (E) solo te lo vas a repartir en 3 niños un pastel y aquí (F) te lo vas a repartir en 7 y te quitarían otro pedazo para, por ejemplo, si aquí (2 pasteles) hubieran 2 y aquí (7 niños) hubieran 6, les tocaría igual y se lo van a repartir porque hay otro niño que ya sería el número 7 y tendría que ser más grande el pastel para que se lo repartieran.*

### Cocientes indicados y fracciones

En la actividad de averiguar quién come más pastel, hay casos en los que es posible contestar sin hacer los repartos, por ejemplo, si el número de niños en ambos repartos es el mismo, basta con ver dónde hay más pasteles, o si el número de pasteles en ambos casos es el mismo, basta con ver dónde hay menos niños.

Cuando se comparan los resultados de dos repartos sin cuantificar el resultado, por ejemplo, cuando se dice «en 3 pasteles entre 4 niños le toca más a cada niño que en 3 pasteles entre 5 niños», se puede decir que se están comparando «cocientes indicados» (3 entre 4 se compara contra 3 entre 5) y para hacerlo, se ponen en juego propiedades de la división (por ejemplo, «a mayor divisor, menor cociente»). Estos cocientes indicados también pueden definirse como «razones». Volveremos sobre esta noción en el capítulo 2 de este libro.

Con estas actividades los alumnos comienzan a relacionar, de manera implícita, los cocientes indicados del tipo «2 pasteles entre 4 niños», con las fracciones, como « $\frac{1}{2}$  pastel por niño».

---

### Actividad 1.8

#### Repartos fáciles de comparar

En la actividad anterior, se pudieron ver algunos casos en los que es relativamente fácil comparar los repartos a partir de establecer ciertas relaciones entre los datos, sin obtener las fracciones correspondientes. A continuación, se extiende la lista de estos casos. Para cada uno, usted proporcione un ejemplo y explique cómo se puede hacer la comparación de los repartos.

- Misma cantidad de niños en los dos repartos.

- Misma cantidad de pasteles en los dos repartos. Este caso es más difícil, que el anterior. ¿Por qué?
- La cantidad de pasteles de uno de los repartos es mayor que la del otro, pero la cantidad de alumnos es menor, por ejemplo, 3 pasteles, 4 niños vs 2 pasteles, 5 niños.
- La cantidad de pasteles en uno de los repartos, es menor que la de niños; y en el otro reparto, es mayor, por ejemplo, 3 pasteles, 4 niños vs 5 pasteles, 4 niños.

Estas actividades de comparación favorecen establecer relaciones entre los datos de los repartos, aunque las fracciones no intervienen explícitamente.

Primaria y  
secundaria

### Actividad 1.9

#### Otra vez: ¿de qué tamaño era el entero?

En capítulo 1 del primer volumen se plantea una actividad (1.4) que consiste en «reconstruir el entero», conociendo una fracción de este. Ahora se plantea la misma actividad en un contexto de reparto. Como podrá observar, se trata de variantes de los problemas de reparto más difíciles, pues ya no se trata de hacer el reparto, sino de partir del resultado de este, e ir hacia atrás para determinar cómo era el entero. Las siguientes actividades podrían ser adecuadas para sexto grado de primaria o primer grado de secundaria.

- a) El pedazo de chocolate que aparece dibujado es  $\frac{2}{5}$  de la barra entera (ver figura 7). Dibuja la barra entera. ¿Hay más de una solución? [SOLUCIONARIO](#)

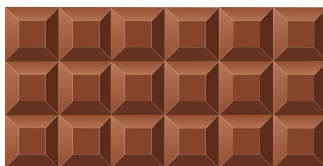


Figura 7.  $\frac{2}{5}$  de la barra entera

- b) Ahora la porción dibujada es  $1\frac{1}{3}$  del chocolate (ver figura 8). Marca hasta dónde llega un chocolate entero. **SOLUCIONARIO**

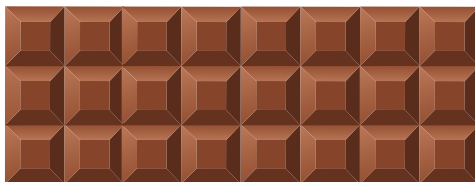
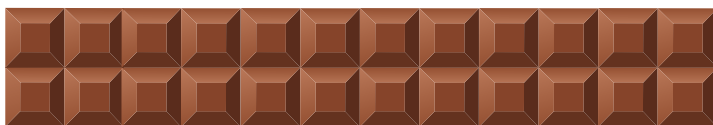
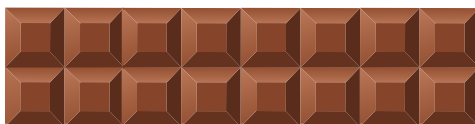


Figura 8.  $1\frac{1}{3}$  de chocolate

- c) Se repartieron barras de chocolate, como la que está dibujada abajo (figura 9), entre varios niños, de manera equitativa (todas las porciones iguales) y exhaustiva (se repartió todo). A cada niño le tocó una porción como la que también está dibujada abajo. ¿Cuántas barras se pudieron haber repartido? ¿Y entre cuántos niños? **SOLUCIONARIO**



Barra de chocolate



Porción de un niño

Figura 9. Barra entera y porción por niño

### Tema 3. La fracción como cociente de dos enteros

#### 3.1 Generalización del resultado de los repartos: $m$ unidades entre $n$ es igual a $\frac{m}{n}$ de unidad

##### Actividad 1.10

##### Tres unidades entre cuatro es igual a $\frac{3}{4}$ de unidad. ¿Es una coincidencia?

Conteste las preguntas a y b y lea el texto que se presenta enseguida.

El resultado de 3 unidades entre 4 es igual a  $\frac{3}{4}$  de unidad. Observe que el dividendo (3) resulta ser el numerador de la fracción, y el divisor (4) es el denominador. ¿Ocurre esto siempre o es coincidencia?, es decir:

- a) ¿pasará lo mismo si se dividen 2 unidades entre 5?
- b) ¿siempre que se dividen  $m$  unidades en  $n$  partes, resulta que cada parte mide justamente  $\frac{m}{n}$  de unidad? Si su respuesta es «no», dé un contraejemplo. Si su respuesta es «sí», trate de explicar por qué.

##### *No es coincidencia*

Supongamos que para hacer el reparto equitativo y exhaustivo de 5 pasteles entre 8 personas se decide hacer el reparto pastel por pastel. Entonces, del primer pastel, a cada persona le toca  $\frac{1}{8}$  de pastel. Del segundo pastel, a cada persona le toca  $\frac{1}{8}$  de pastel, y así sucesivamente. De los 5 pasteles, a cada persona le toca 5 veces  $\frac{1}{8}$  de pastel:

$$\frac{1}{8} \text{ de } U + \frac{1}{8} \text{ de } U + \frac{1}{8} \text{ de } U + \frac{1}{8} \text{ de } U + \frac{1}{8} \text{ de } U = \frac{5}{8} \text{ de } U$$

Con esto, se empieza a ver que no se trata de una coincidencia. En general, el reparto de  $m$  pasteles entre  $n$  es igual a  $\frac{m}{n}$  de pastel:



- si se reparte un pastel entre  $n$ , a cada uno le toca  $\frac{1}{n}$  de pastel;
- si se reparten  $m$  pasteles entre  $n$ , a cada uno le toca  $m$  veces  $\frac{1}{n}$  de unidad, es decir,  $\frac{m}{n}$  de unidad.

Los alumnos, en quinto o sexto grado de primaria, si han tenido varias experiencias haciendo repartos, pueden llegar a establecer este resultado general, con un poco de ayuda, a partir de preguntas como: «¿se puede prever qué parte del pastel (o de la unidad) le corresponde a cada uno, sin tener que hacer el reparto?» Los alumnos podrían explorar con distintos repartos. En cierto momento, se puede incluir el caso de porciones mayores que la unidad: «Y si hay más pasteles que niños, ¿también se puede anticipar cuánto le tocará a cada uno? Por ejemplo, ¿si hay 7 pasteles entre 4 niños?» Si se aplica el hallazgo anterior, sale  $\frac{7}{4}$  y eso es lo mismo que decir  $1 + \frac{3}{4}$  pasteles para cada niño.

A continuación, se analizará una experiencia en la que los alumnos de un grupo de sexto grado de primaria resolvieron varios problemas de reparto. Se destacará la diversidad de formas que encontraron para resolver, y la riqueza de los argumentos que emergieron. En la actividad 1.11 que viene después de la descripción de la experiencia, se plantean preguntas para analizarla.

### El reparto de pasteles en sexto grado

En el trabajo citado con anterioridad (Block, 2006a), con el propósito de establecer la relación  **$a$  unidades  $\div b = \frac{a}{b}$  de unidad**, se aplicaron en sexto grado un conjunto de situaciones de reparto con dos características:

- repartos en los que el número de pasteles a repartir es variable pero el número de niños es constante (por ejem-

- plo, 1 pastel entre 5; 2 pasteles entre 5 o 3 pasteles entre 5, etc.), con la finalidad de que puedan aplicar razonamientos como «2 pasteles entre 5 niños debe ser el doble de 1 pastel entre 5 niños» (sesiones 1 y 2);
- repartos en los que las cantidades son más grandes, para disuadir el recurso de la representación gráfica (sesión 3).

No se entregó ningún material. Los alumnos contaban con hojas blancas y lápiz.

Como se mostrará a continuación, los problemas dieron lugar a una buena cantidad de procedimientos, de relaciones y de generalizaciones.

### **Procedimientos identificados**

- En la sesión 1, los repartos fueron: 2 entre 5 y 3 entre 5.
- En la sesión 2, fueron: 3 entre 7, 2 entre 7 y 4 entre 7.
- Aparecieron cinco procedimientos, de los cuales dos, el 3 y el 4, fueron mayoritarios y se generalizaron.

#### *Procedimiento 1: partición en 2<sup>n</sup>*

Consiste en hacer primero particiones entre potencias de 2 como suelen hacer los alumnos de primer ciclo. En este grado fueron muy pocos los alumnos que utilizaron este procedimiento, y, en algún momento, partieron entre el número de niños (es decir, entre el divisor).

#### *Procedimiento 2: integrando una nueva unidad*

Para el reparto 2 entre 5, por lo menos en un equipo, los alumnos consideraron a los dos pasteles como uno solo y respondieron  $\frac{1}{5}$ , dejando implícito que se trataba de  $\frac{1}{5}$  de *dos* pasteles.

Esto dio lugar a una larga discusión. A los autores de ese resultado se les dificultó explicarlo. Después, varios niños,

apoyándose en representaciones gráficas que hicieron en el momento, lograron explicar que «es lo mismo  $\frac{2}{5}$  de un pastel que  $\frac{1}{5}$  de dos pasteles» (ver figura 10).

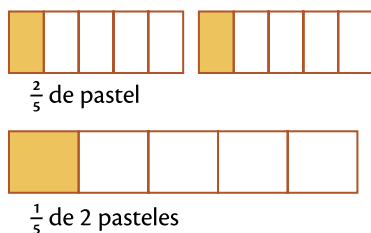


Figura 10.  $\frac{1}{5}$  de dos y  $\frac{2}{5}$  de uno

Efectivamente, no resulta difícil establecer que 2 *unidades* entre 5 es  $\frac{1}{5}$  de 2 *unidades*. Pero  $\frac{1}{5}$  de 2 *unidades*, ¿cuánto es de una sola unidad? Esto lo resuelven con el procedimiento 3 o con el 4.

*Procedimiento 3: repartir pastel por pastel*

Consiste en repartir pastel por pastel a las 5 personas, por ejemplo, para 3 entre 5:

- Del primer pastel toca a cada una  $\frac{1}{5}$
- Del segundo pastel, otro  $\frac{1}{5}$
- Del tercer pastel, otro  $\frac{1}{5}$
- En total, toca a cada una  $\frac{3}{5}$  de pastel

Número de pasteles	Porción por persona
1	$\frac{1}{5}$
$\times 3$	$\times 3$
3	$\frac{3}{5}$

Este es el procedimiento que se deseaba propiciar por llevar fácilmente a la generalización: « $m$  pasteles entre  $n$  personas igual a  $\frac{m}{n}$  de pastel a cada persona».

La mayor parte de los equipos lo utilizó desde el primer reparto ( $2 \div 5$ ), y llegó a formularlo muy claramente:

- «(2 pasteles entre 5 es  $\frac{2}{5}$ ) porque un pastel entre cinco es  $\frac{1}{5}$ , entonces 2 pasteles entre 5 es  $\frac{2}{5}$ »;
- «(4 pasteles entre 7 es  $\frac{4}{7}$  porque) dividimos cada pastel en 7, le damos un séptimo a cada persona de cada pastel, les tocan  $\frac{4}{7}$ ».

Más adelante, en la sesión 3, frente a la tarea de repartir 27 pasteles entre 45 personas, efectivamente la mayoría acudió a ese razonamiento: «Un pastel entre 45 toca a  $\frac{1}{45}$  de pastel por persona, entonces en total toca a  $\frac{27}{45}$  de pastel por persona.»

Algunos de los que no utilizaron este procedimiento y llegaron al resultado por un camino más laborioso, o no llegaron,

al escuchar la explicación durante la puesta en común se muestran sorprendidos. «¿Se podía dividir cada pastel!», exclamó uno de ellos.

Es decir, se estableció la relación  $m \div n = \frac{m}{n}$ , en el contexto de reparto.

Número de pasteles	Porción por persona
1	$\frac{1}{n}$
$\times m$	$\times m$
$m$	$\frac{m}{n}$

*Procedimiento 4: partir cada pastel entre el número de niños (entre 5), juntar todos los pedazos (10 quintos) y repartirlos.* Desde la primera sesión algunos alumnos resolvían el reparto 2 entre 5, con apoyo en dibujos, así:

$$\begin{aligned} 2 \text{ pasteles} &= 10 \text{ quintos y} \\ 10 \text{ quintos entre } 5 &= 2 \text{ quintos} \end{aligned}$$

En general:  $m$  entre  $n = mn$  «eneavos» entre  $n$  y eso es igual a  $\frac{m}{n}$

En los problemas en los que los números son un poco más grandes no apareció más este procedimiento, es decir, no lo generalizan. Como se verá después (en el tema 4), este mismo procedimiento aparece en otro contexto, en la secuencia «La medida del paso de los Robots».

*Procedimiento 5: encuentro del cociente  
fraccionario con el cociente decimal*

Cuando el dividendo de la división (cantidad de pasteles) es mayor que el divisor (cantidad de personas), pero no es múltiplo de este (es decir, queda un residuo), aparecen dos formas de hacer el reparto: usar la división de enteros, extendida a cociente decimal, o bien, fraccionar el residuo. A continuación se muestra un ejemplo.

Para 19 pasteles entre 7, al usar la división, obtienen un resultado de 2 pasteles por persona y sobran 5 pasteles.

Varios alumnos resolvieron el reparto del residuo partiendo los pasteles en séptimos: 5 entre 7 es  $\frac{5}{7}$ ; un alumno usó una regla incluida en su libro de texto, según la cual la fracción del resultado se forma con el residuo de la división como numerador y con el divisor como el denominador. Otros, en cambio, continuaron con la división, con decimales:

$$\begin{array}{r} 2.71 \\ 7 \overline{)19} \\ \underline{50} \\ 10 \\ \underline{3} \end{array}$$

Surgió entonces la duda de si estos resultados, 2.71 y  $2\frac{5}{7}$ , eran o no equivalentes, y de cómo pasar de una representación a otra. Los alumnos mostraron no estar nada seguros de dicha equivalencia. En la primera ocasión en que esto sucedió llegaron a establecer que:

- seguramente los dos resultados son correctos;
- 2.71 equivale a:  $2 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100}$  o  $2 + \frac{71}{100}$ ;
- la división 5 entre 7 no se acaba.

En otra ocasión, para 27 entre 45, también aparecieron los dos tipos de resultados: mediante la partición del residuo y la división con decimales. En este caso la fracción que se genera sí es decimal, por lo que «la división se acaba». Un alumno (excepcionalmente hábil) logró mostrar la equivalencia:

$$\begin{aligned}\frac{27}{45} &= \frac{3}{5} \text{ (simplificando)} \\ 27 \div 45 &= 0.6 \\ 0.6 &= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

---

### Actividad 1.11

#### Aproximaciones al cociente

Analice algunos aspectos de la actividad anterior, a partir de las siguientes indicaciones.

- Describa los diferentes caminos a través de los cuales, en esta clase, los alumnos se aproximaron al cociente del reparto  $m$  pasteles entre  $n$ . [SOLUCIONARIO](#)
- En la situación hubo una actividad en la que se trató de encontrar el resultado de varios repartos, todos entre 5 niños. ¿En qué ayudó que el número de niños fuera una constante? [SOLUCIONARIO](#)
- En la primaria hay ocasiones en las que, sin una explicación, se hace uso, de manera implícita, de la definición de fracción como cociente. Si conoce alguna de esas ocasiones, descríbala y después vea las que se mencionan en el [SOLUCIONARIO](#)

---

### Actividad 1.12

#### Dos maneras de presentar un problema. ¿Se obtiene el mismo problema?

- Resuelva el siguiente problema. Después, explique cómo se imagina que lo podrían resolver alumnos de sexto grado de primaria o primer grado de secundaria. [SOLUCIONARIO](#)

*Se repartieron varias galletas entre algunos niños, en partes iguales y sin que sobrara ninguna. A cada uno le tocó  $\frac{2}{3}$  de galleta. ¿Cuántas galletas eran y cuántos niños había? ¿Cuántas respuestas correctas hay?*

- b) Compare el problema que acaba de resolver con el problema anterior (1.9, inciso c) ¿Qué diferencias encuentra? ¿Cuál le parece más difícil y por qué? **SOLUCIONARIO**

### 3.2 Un problema de división en el que no se reparten pasteles

¿Qué pasaría si en lugar de repartir pasteles entre niños, ahora se tratara de dividir una longitud de cierta medida en cierto número de partes iguales? Si los alumnos ya saben que  $a$  pasteles entre  $b$  niños es igual a  $\frac{a}{b}$  de pastel por niño, es decir, si ya establecieron la relación  $a$  unidades  $\div b = \frac{a}{b}$  de unidad en el contexto del reparto de pasteles, ¿cabe esperar que la transfieran al contexto de medidas de longitud? Si ya saben que 3 pasteles entre 4 niños arrojan  $\frac{3}{4}$  de pastel por niño, ¿podrán saber que, si se dividen 3 metros en 4 partes iguales, cada una será de  $\frac{3}{4}$  de metro, sin necesidad de calcularlo? En un estudio<sup>17</sup> se exploró la pregunta anterior, con alumnos de quinto grado, mediante la secuencia de situaciones «El paso de los robots». Resultó que ningún alumno trasladó al nuevo contexto la relación construida en el contexto de reparto de pasteles. Los alumnos desarrollaron nuevos y diversos procedimientos, para lo cual pusieron en juego sus conocimientos previos sobre fracciones, sobre decimales y sobre la división, e hicieron conexiones entre esos conocimientos. Esto en sí ya fue valioso por el repaso amplio que permitió, más allá

de que algunos de los procedimientos desarrollados fueron elementales y otros fueron sistemáticos. Al final, fue posible volver a establecer en la clase que la división de  $a$  unidades entre  $b$ , arroja como cociente  $\frac{a}{b}$  de unidad en el nuevo contexto, lo cual constituye una manera de fortalecer el vínculo conceptual entre la división y la fracción.

A continuación, se presentan algunos de los procedimientos que desarrollaron los alumnos de un grupo de sexto grado, en este contexto<sup>18</sup>. Es importante señalar que dichos procedimientos no fueron enseñados por el maestro, y que en otro grupo podrían no aparecer algunos, y sí otros. Al término de la aplicación de una secuencia como esta, se podría institucionalizar, con la intervención del maestro, alguno de los procedimientos más sistemáticos.

### **La situación «El paso de los robots»**

Se trata de un conjunto de «robots» que, al dar cierto número de pasos, avanzan cierta distancia. Cada robot da pasos de determinado tamaño, unos dan pasos más grandes que otros pero los de un mismo robot son siempre iguales.

En esta situación se plantea que *todos los robots dan cinco pasos*. Se da la distancia avanzada en los cinco pasos por cada robot, y lo que debe averiguarse es el tamaño de un paso.

Por ejemplo, en la tabla de abajo se presentan 4 robots. Todos dan 5 pasos. Se informa la distancia avanzada por cada uno en los 5 pasos. Se debe averiguar el tamaño del paso, o, lo que es lo mismo, la distancia avanzada en un paso.



Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en un paso
A	1 unidad	
B	2 unidades	
C	3 unidades	
D	4 unidades	

En la primera aplicación de la situación se pidió a los alumnos que construyeran físicamente la longitud del paso (se utilizaron tiras de cartoncillo para representar tanto a las unidades como al trayecto avanzado) y, en las sesiones siguientes, se les pidió además que determinaran la medida. La primera opción (construir el paso físicamente sin pasar por la medida) no requiere del uso de fracciones, pero permite comprender las relaciones entre los elementos en juego.

En resumen, las características de la situación son las siguientes.

- Para cada robot, hay tres datos que son: el tamaño de su paso, el número de pasos (este dato es común para todos), y la distancia recorrida.
- El dato que no se conoce es *el tamaño del paso*.
- El tamaño del paso de cada robot se podría calcular mediante la división «distancia recorrida entre número de pasos», pero los alumnos no lo saben de entrada, y además, la mayoría no sabe aún hacer esa división, entonces, buscarán otros procedimientos.
- Todos los robots dan 5 pasos. Esta constante permite establecer una relación proporcional entre el tamaño del paso y la distancia recorrida por cada robot. Gracias a eso se cumple que, por ejemplo, si un robot recorre dos veces (o tres veces, o  $n$  veces) la distancia que recorre otro, es porque su paso también es dos veces (o tres veces, o  $n$

veces) el tamaño del paso de aquel. Entonces, el robot que recorre 3 unidades, por ejemplo, debe dar pasos del triple de tamaño de los que da el que solo avanza una unidad. Se buscó propiciar que los alumnos averiguaran el tamaño de los pasos de cada robot usando esta propiedad de la proporcionalidad, sin hacer uso de la división. Algunos lo hicieron, pero la mayoría desarrolló otras maneras de calcular el tamaño de los pasos. La diversidad de maneras de resolver fue interesante.

### Materiales y las formas de validar

Cada equipo recibió una ficha de trabajo en la que se presentó la información en una tabla como la anterior en la que se indica la distancia recorrida en 5 pasos. Además, recibieron las siguientes tiras de cartoncillo:

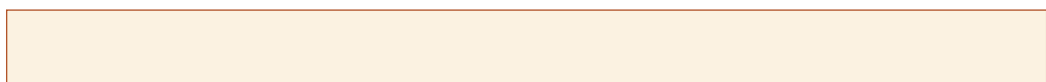
- tira numerada (tira amarilla);



- tira **unidad** de la misma longitud que las unidades de la tira numerada;



- tira de cartoncillo para construir una longitud del tamaño del paso.



Se previeron tres formas de validar.

La «validación empírica» consiste en cortar la tira de cartoncillo según la medida estimada para el paso e iterarla sobre la tira numerada tantas veces como lo indique el número de pasos. Si al final hay coincidencia con la distancia señalada, entonces la medida del paso es correcta.

La «validación aritmética» consiste en sumar la medida estimada para el paso tantas veces como lo indique el número de pasos, o bien multiplicar la medida por el número de pasos, para finalmente obtener el recorrido total. Esta forma de validación lleva a establecer una relación multiplicativa: medida de un paso multiplicada  $\times$  5 pasos = distancia recorrida en 5 pasos.

Por último, la «verificación intermedia», así nombrada porque incluye elementos de las dos anteriores: por ejemplo, si para un robot que avanza 3 unidades en 5 pasos se afirma que su paso mide  $\frac{3}{5}$ , cada unidad de la tira numerada se divide aproximadamente en quintos (marcando las líneas con un lápiz), posteriormente se forman segmentos de tres quintos y, finalmente, se verifica si 5 veces  $\frac{3}{5}$  es igual a 3 unidades. Si bien se recurre a una división física de las unidades, no es necesario que tal división sea exacta (es solo un apoyo para ir contando los quintos de unidad).

---

### Actividad 1.13

#### ¿Cuánto mide un paso?

- a) Calcule las distancias recorridas en un paso por los distintos robots y anótelas en la tabla anterior.
- b) Haga anotaciones acerca de cómo piensa que resolverían alumnos de quinto o sexto grado de primaria, prevea algunas dificultades.
- c) Analice los procedimientos de los alumnos de quinto grado que se reportan a continuación.

## Los procedimientos

A continuación, veremos algunos de los procedimientos de resolución de los alumnos. Los procedimientos están organizados en dos grupos, primero los que son por ensayo y error, y después los que son más sistemáticos.

### *Procedimientos poco sistemáticos*

- Obtener físicamente «el paso» por ensayo y error

Por ejemplo, para un robot que avanza 3 unidades en 5 pasos, algunos alumnos cortaron un pedazo de la tira, estimando que al iterarlo 5 veces llegara al 3. Una vez cortado, lo iteraron (ver figura 11). De acuerdo con el resultado obtenido, cortaron un pedazo más grande o más pequeño que el anterior.

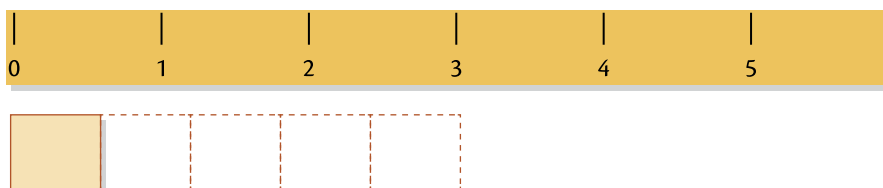


Figura 11. Iterando el pedazo sobre la tira unidad

- Obtener físicamente el tamaño del paso formando una longitud igual al recorrido total y partiéndola entre el número de pasos

Para el mismo ejemplo (3 unidades en 5 pasos), unos alumnos cortaron una tira de longitud igual a 3 unidades, y la dividieron en 5 partes aproximadamente iguales, por tanteo (ver figura 12).

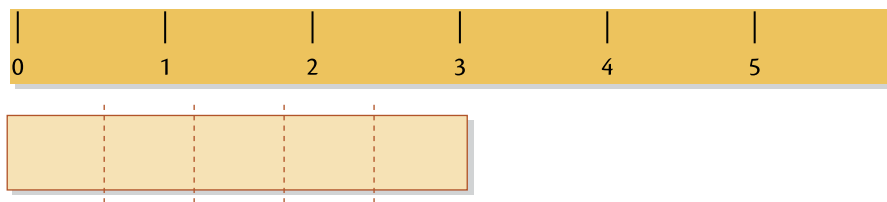
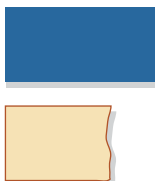


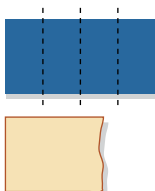
Figura 12. Tira de 3 unidades dividida en 5 partes

En los procedimientos anteriores, una vez que se tuvo el paso, algunos alumnos intentaron asignar una medida comparando el paso con la tira unidad, a través de diferentes medios que se explican a continuación.

- Estimando: «*un poco más de la mitad*», «*como un tercio*» (de la unidad).



- Doblando la tira unidad en medios, en cuartos, y, finalmente, aproximando con octavos<sup>19</sup>.



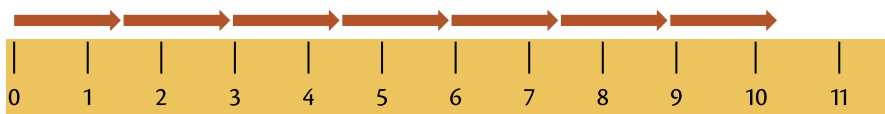
- Estimar una fracción, multiplicarla por los pasos, y ajustar

Sin utilizar el material, algunos alumnos estimaron una fracción de unidad y la verificaron multiplicándola por el número de pasos (o sumándola iteradamente) y luego hicieron ajustes progresivos. Por ejemplo, para un robot que avanza 9 unidades en 7 pasos, se presentó el siguiente diálogo en un equipo:

*Ismael (a Juan): [el tamaño del paso] es menos de uno y medio.*

*(...)*

*Alejandro: Va a llegar al nueve y se va a pasar por un medio. Vean (prueban haciendo marcas sobre la tira amarilla y se pasan más de lo previsto).*



*(...)*

*Alejandro: (...) Tiene que ser entre uno y uno y medio.*

*Ismael: Tendría que ser uno y un cuarto.*

*(Prueban haciendo marcas cada  $1\frac{1}{4}$ , llegan a  $8\frac{3}{4}$ ).*

*Alejandro: Un tercio es más de un cuarto, pero menos de un medio.*

*Ismael: Sí, un tercio.*

*Alejandro: Un quinto es más chico que un cuarto, un tercio es más grande. Uno y un tercio.*

*(Intentan con un entero y un tercio, pero al avanzar 6 pasos llegan ya a 8 unidades) (...)*

*Observador: Entonces, si es un paso y un cuarto, le falta, si es un paso y un tercio, le sobra, ¿cuánto tendría que ser? (...)*

*Juan: Un paso un quinto (...)*

*Alejandro: Pero es que mira, un quinto es más chico que un cuarto, y si con un cuarto no se pudo, con un quinto menos.*

*Ismael: Un octavo.*

*Alejandro: ¡Ay! (risas)*

La búsqueda de una medida  $x$  que satisfaga la condición 7 veces  $x = 9$  unidades lleva a los niños a estimar varias medidas, a iterarlas y ajustarlas hasta encontrar una buena acotación entre números formados con fracciones unitarias:

$$1\frac{1}{4} < \frac{9}{8} < 1\frac{1}{3}$$

Cabe señalar que cuando los alumnos estimaron medidas fraccionarias, casi siempre fueron unitarias (es decir, con numerador 1). Si en una clase se presenta una situación como esta, sería un buen momento para preguntar y estudiar si existen o no fracciones mayores que  $\frac{1}{4}$  pero menores que  $\frac{1}{3}$ .

### Actividad 1.14

**¿Existen fracciones mayores que  $\frac{1}{4}$  pero menores que  $\frac{1}{3}$ ?**

- a) Describa con sus palabras la dificultad que dejan ver los alumnos en el episodio anterior. **SOLUCIONARIO**
- b) ¿Cómo se relaciona esa dificultad con la propiedad de la densidad? **SOLUCIONARIO**

### Procedimientos más sistemáticos

Los procedimientos más sistemáticos se generaron a partir de la segunda sesión, cuando se pidió a los alumnos que proporcionaran la medida de cada paso. Vamos a analizar tres

procedimientos: 1) el que utiliza propiedades de la proporcionalidad; 2) el que subdivide las unidades para obtener un número total de partes divisible entre el número de pasos; 3) el que obtiene una aproximación decimal del tamaño del paso (con y sin algoritmo de la división).

- Procedimiento 1. Pensar en una escala: «*si solo hubiera avanzado una unidad...*»

Este fue el procedimiento que se quiso propiciar en la secuencia, pero muy pocos alumnos lo desarrollaron. Veamos primero un ejemplo en el que, entre los robots de la lista, figuraba uno cuyo recorrido total era una sola unidad.

Para un robot B que avanza 2 unidades en 5 pasos.

*Erick: Primero dividimos la unidad de medida en cinco partes, que es el robot A (el robot A avanza 1 unidad en 5 pasos), y después como son dos unidades (robot B), es lo doble de A.*

*Maestra: ¿Cómo escribieron su mensaje?*<sup>20</sup>

*Erick: Igual (al mensaje enviado al equipo anterior: «Haz robot que dé un paso de  $\frac{2}{5}$ ») (...)*

El esquema siguiente resume el procedimiento que explicó Erick:

	Distancia en 5 pasos	Distancia en 1 paso
Robot A	1 u	$\frac{1}{5}$ de u
Robot B	2 u	$\frac{2}{5}$ de u

Diagram illustrating the scaling process:

- Robot A: 1 u (Distance in 5 steps) →  $\frac{1}{5}$  de u (Distance in 1 step)
- Robot B: 2 u (Distance in 5 steps) →  $\frac{2}{5}$  de u (Distance in 1 step)
- Scaling factors:  $\times 2$  (from Robot A to Robot B) and  $\times 2$  (from the 1-step distance of Robot A to Robot B).



Naturalmente, el procedimiento anterior se facilita si entre los robots aparece el de aquel que avanza una sola unidad en los 5 pasos. Veamos ahora un ejemplo en el que el robot que avanza una unidad no figuraba entre los robots de la lista:

Para un robot que avanza 5 unidades en 7 pasos.

*Raúl: Primero dividimos entre siete, de esos siete solo tomamos cinco.*

*Maestra: ¿Pero por qué agarraron cinco?*

*Raúl: Porque nada más eran cinco unidades.*

*Maestra: (...) nos deja medio desconcertados, parece magia. Porque eran cinco unidades siete pasos, ustedes nada más agarraron la unidad, la dividieron en siete y tomaron cinco (partes de cada unidad). ¿Cómo supieron que sí les iba a salir? (...)*

*Maltos: Si quisiéramos llegar a la unidad en siete pasos nada más necesitaríamos un séptimo y si quisiéramos llegar a dos unidades serían dos séptimos y así va aumentando hasta llegar al cinco y cinco séptimos y llegamos a la quinta unidad.*

En este procedimiento subyace la idea de una especie de escala: calcular el tamaño del paso en el caso hipotético de que el robot hubiera avanzado solamente una unidad en la cantidad indicada de 7 pasos (si en  $n$  pasos avanzó una unidad, cada paso mide  $\frac{1}{n}$  de unidad), y luego «amplificar» el tamaño de paso así obtenido, multiplicándolo por el número de unidades realmente avanzadas (si la distancia realmente avanzada fue de  $m$  unidades, el paso mide  $m$  veces  $\frac{1}{n}$  de unidad, es decir,  $\frac{m}{n}$  de unidad).

Quizá Maltos fue el único en lograr esta comprensión del procedimiento. La utilización de esta relación de pro-

porcionalidad (a un recorrido  $n$  veces mayor corresponde un paso  $n$  veces mayor), como recurso para resolver el problema, resultó aún difícil para la mayoría de los niños de quinto grado de primaria.

### Actividad 1.15

#### ¿Por qué 5 unidades entre 7 es $\frac{5}{7}$ de unidad?

- Use el procedimiento que utilizaron Raúl y Maltos para explicar por qué 5 unidades entre 7 es  $\frac{5}{7}$  de unidad.
- Trate de expresar la explicación anterior usando letras para generalizarla: ¿por qué cuando se divide  $a$  unidades entre  $b$ , el resultado es  $\frac{a}{b}$  de unidad? [SOLUCIONARIO](#)

- Procedimiento 2: subdividir las unidades para obtener un número total de partes divisible entre el número de pasos

Varios alumnos tenían claro que el problema de calcular la medida de cada paso se resolvía con una división, pero se encontraban con una división «difícil» de realizar, ya que el dividendo no era múltiplo del divisor y generalmente era menor que el divisor. Por tal razón, optaron por subdividir cada unidad en un determinado número de partes para después dividir el total de partes entre el número de pasos. El problema para resolver ahora era: ¿en cuántas partes conviene partir cada unidad? Por ejemplo, nuevamente para el robot que avanza 9 unidades en 7 pasos, Alejandro divide cada una de las 9 unidades entre 5, obtiene 45 quintos, divide estos quintos entre 7, pero obtiene un residuo; prueba entonces dividir cada unidad entre 6, obtiene 54 sextos, pero también le queda un residuo.

### Actividad 1.16

**¿En cuántos pedazos dividir cada unidad para que al dividir esa cantidad de pedazos entre 9 no sobre ninguno?**

Proporcione un ejemplo de uno de los residuos que le quedaron a Alejandro. ¿Hay algún divisor con el que hubiera podido no tener residuo? **SOLUCIONARIO**

Volvamos al equipo de Alejandro en donde estiman una fracción, la multiplican por la cantidad de pasos y hacen ajustes; ahí los alumnos buscaron un factor de partición que les permitiera dividir el total de partes entre el número de pasos sin que hubiera residuo. De una manera que no logramos identificar, Alejandro descubrió que el número de pasos proporciona la partición deseada. Trabajaron con el robot que avanza 4 unidades en 5 pasos.

(...)

*Alejandro: [Partir] en cinco partes [cada unidad], hay veinte quintos.*

*Ismael: Son dos cuartos y un cachito (no considera la idea de Alejandro, sigue buscando por ensayo y error).*

*Alejandro: Sí, pero ese cachito ¿cómo lo vas a sacar? ... Cuatro por cinco serían los veinte.*

*Ismael: En cuartos sería en lo que se divide...*

*Alejandro: No porque mira, esto (la unidad) lo vamos a partir en quintos. Lo que tenemos que hacer es cómo llegar en cinco pasos a veinte quintos.*

*Observador: ¿Cómo distribuyes los veinte quintos en cinco pasos?*

*Alejandro: ¡Cuatro quintos!*

*(Ismael le pide que lo compruebe. Alejandro divide con dificultad la unidad en quintos. Finalmente obtiene los cuatro quintos y comprueba sobre la recta que, efectivamente, llega a las 4 unidades en 5 pasos)*

Más adelante, Ismael y Alejandro muestran que han podido generalizar su procedimiento. Para un robot que avanza 9 unidades en 7 pasos:

*Alejandro: Ya pudimos. Primero hicimos lo que nos dijo Ismael, de acá al nueve hay sesenta y tres unidades (séptimos) lo dividimos entre siete y nos dio a nueve, entonces... De acá a acá hay sesenta y tres séptimos entonces lo dividimos eso entre siete, porque eran siete pasos y nos dio...*

*Ismael: De nueve no sobra nada. Nos dio a nueve y no sobró nada.*

*Alejandro: Con nueve séptimos llega acá. (Al número 9).*

*(...)*

*Observador: ¿Y cómo sacaron los sesenta y tres séptimos?*

*Alejandro: Multiplicamos siete por nueve.*

Este procedimiento se difundió rápidamente entre varios miembros del grupo. Es, efectivamente, un procedimiento accesible y eficiente que permite encontrar que  $a$  unidades entre  $b$  es igual a  $\frac{a}{b}$  de unidad.

Pero ¿por qué resulta precisamente la fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor? El procedimiento usado por los alumnos no deja ver claramente por qué<sup>21</sup>. Sin embargo, independientemente

de la explicación, la cual deberá esperar todavía algunos años, el procedimiento constituye un logro importante de los alumnos.

### Actividad 1.17

#### Réplica de un procedimiento y justificación

- a) ¿Cómo habría sido el procedimiento anterior si los datos hubieran sido 5 unidades en 4 pasos?
- b) Explique con sus palabras, a partir del procedimiento anterior, por qué al dividir  $a$  unidades entre  $b$ , resulta como cociente exactamente  $\frac{a}{b}$  de unidad. **SOLUCIONARIO**

- Procedimiento 3: aproximar el tamaño del paso en décimos

La búsqueda de una partición de las unidades que permitiera dividir la distancia recorrida entre el número de pasos, llevó a una segunda solución: dividir cada unidad en décimos. Ciertamente, con eso no se asegura que el número total de partes sea divisible entre el número de pasos. Si la división de la cantidad obtenida de décimos entre el número de pasos no tiene residuo, el resultado será exacto, pero puede pasar que sí haya residuo, en cuyo caso, el resultado será solamente una medida aproximada.

Este procedimiento apareció de dos maneras. Algunos alumnos dividieron las unidades en 10 partes. Cabe decir que este procedimiento podría funcionar muy bien como introducción del algoritmo de la división con cociente decimal, si se tuviera esa intención.

Otros alumnos, pocos, intentaron aplicar de entrada el algoritmo para dividir el número de unidades del recorrido entre el número de pasos. Se encontraron entonces con dos tipos de obstáculo: la falta de dominio de dicho

algoritmo y la dificultad para interpretar un decimal aplicado a la unidad «tira azul», si en este caso los centésimos del cociente no representan centímetros, entonces ¿qué representan?

A continuación, se presenta un ejemplo cuyo interés radica en que los alumnos solo lograron obtener la primera cifra decimal del cociente y, a partir de esa aproximación, intentaron acercarse más al cociente exacto mediante un proceso de sumas iteradas.

Primero aparece la siguiente división:

$$\begin{array}{r} 1.1 \\ 6 \overline{) 7} \\ 10 \end{array}$$

Y después las sumas:

1.1	1.2
1.1	1.2
1.1	1.2
1.1	1.2
1.1	1.2
<u>1.1</u>	<u>1.2</u>
6.6	7.2

Surge así un problema que podría ser objeto de trabajo con los alumnos: ¿hay o no un número comprendido entre 1.1 y 1.2?

Por otra parte, cabe preguntar ¿en algún momento debe quedar un residuo de cero, es decir, el cociente de dos números naturales debe poderse expresar siempre de manera exacta mediante un decimal? Este constituye un problema difícil de resolver con los alumnos por el momento. En la actividad siguiente se retomará.

### Actividad 1.18

#### ¿Hay un número entre 1.1 y 1.2?

Busque respuestas a dos de las preguntas que se derivan del análisis anterior: ¿hay o no un número comprendido entre 1.1 y 1.2?; ¿el cociente de dos números naturales siempre se puede expresar de manera exacta mediante un decimal? [SOLUCIONARIO](#)

### Actividad 1.19

#### Diferencias entre el problema de repartir pasteles, y el de hallar el tamaño del paso de los robots

El problema de los robots, al igual que el del reparto de pasteles, implica una división y puede dar lugar al uso de fracciones para expresar el cociente. Sin embargo, los problemas no son equivalentes puesto que, como ya se habrá podido notar, dan lugar a procedimientos muy distintos. Por ejemplo, el procedimiento de estimar una medida, verificarla y hacer aproximaciones por ensayo y error, solo ocurre en el problema de los robots.

- ¿Qué procedimientos de los revisados en el reparto de pasteles (tema 1) y de los que aparecieron ahora en los pasos de los Robots, son comunes? [SOLUCIONARIO](#)
- ¿Qué diferencias hay entre los procedimientos propiciados en ambos tipos de problemas? [SOLUCIONARIO](#)
- ¿Cuál es la variable didáctica que determina esa diferencia?
- Lea la siguiente información sobre las preguntas anteriores. Este momento constituye una ocasión para repasar algunos conceptos de didáctica.

### Variable didáctica, descontextualización, transferencia

En el reparto de pasteles, los objetos que se reparten están separados uno del otro, lo que puede inducir, en un momento dado, la idea de repartirlos uno por uno, idea que puede ser importante para comprender que  $m$  unidades entre  $n$  es igual a  $m$  veces  $\frac{1}{n}$  de unidad, y por lo tanto es igual a  $\frac{m}{n}$  de unidad.

En cambio, en la situación de los robots, la medida de un paso se piensa como aquella que  $m$  veces es igual a  $n$  unidades (es decir, se plantea una relación de *commensuración* entre pasos y unidades). En este contexto no resulta natural dividir *cada unidad* por separado. Si se quiere dividir un listón de 4 metros de longitud en 10 partes, ¿no se pensaría en dividir cada metro en 10 partes!

Por ello, puede decirse que el hecho de que la *magnitud* esté formada por cantidades separadas, cantidades que son naturalmente consideradas como unidades, como los pasteles, o bien esté formada por una sola cantidad, como la longitud, para la cual no hay una unidad predeterminada, afecta a los procedimientos y por lo tanto constituye una **variable didáctica** en los problemas que implican dividir<sup>22</sup>.

En las situaciones anteriores se destaca también que la relación  $a \div b = \frac{a}{b}$  no se aprende desde el principio de una buena vez y para siempre. Aun si dicha relación se establece en el contexto del reparto de pasteles u otro similar, al cambiar de contexto puede ser necesario reconstruirla. **No necesariamente hay una transferencia** de lo aprendido en un contexto, al otro. Se esperaría que, en algún momento, los alumnos logren identificar la operación que tienen en común estas dos situaciones, y en otras, y en esa medida las **descontextualicen**, para establecer una propiedad más general. Es muy posible que este proceso tome tiempo y requiera varias experiencias de resolución de este tipo de problemas. También puede ayudar que el profesor, al final de la resolución, propicie que los



alumnos comparen un problema con otro y ayude a destacar lo que tienen en común.

Como seguramente pudo apreciar, los problemas de reparto pueden dar lugar a una secuencia de actividades que corre de segundo a sexto grado de primaria y hasta secundaria, a lo largo de la cual los alumnos adquieren cada vez más conocimientos específicos. No se trata de un tipo de problema que baste con poner una sola vez, en un grado escolar.

### 3.3 Dos definiciones de las fracciones: como partes de unidad y como cocientes

Hemos estado trabajando con la construcción clásica de las fracciones, como partes de unidad, en la que  $\frac{a}{b}$  de unidad significa  $a$  veces  $\frac{1}{b}$  de unidad. Es decir, el denominador indica en cuántas partes se divide la unidad, y el numerador indica cuántas partes se toman (ver figura 13).

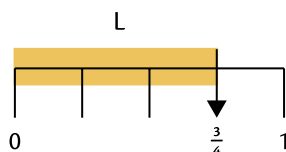


Figura 13.  $\frac{3}{4}$  como partes de unidad: una unidad partida en cuatro partes iguales, de las que se toman tres

Por otra parte, hemos visto que las fracciones pueden definirse también como cocientes:  $\frac{a}{b}$  es el cociente de  $a \div b$ , es decir, es el número que multiplicado por  $b$ , da  $a$  (ver figura 14).

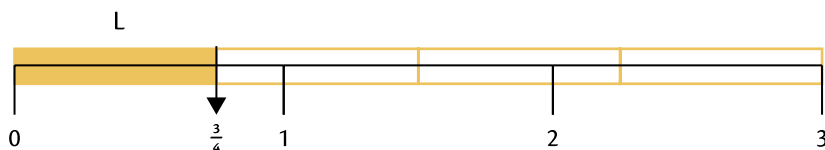


Figura 14.  $\frac{3}{4}$  de unidad es el resultado de dividir 3 unidades entre 4; o, dicho de otra manera, es la medida que multiplicada por 4 es igual a 3 unidades

Se trata de dos definiciones diferentes, del mismo objeto. Ante una división como «2 unidades entre 5», es posible llegar al cociente « $\frac{2}{5}$  de unidad» desde cualquiera de las dos concepciones:

- si se concibe a las fracciones como *cocientes*, la respuesta  $\frac{2}{5}$  es inmediata puesto que justamente la definición de  $\frac{2}{5}$  es  $2 \div 5$ ;
- si se concibe a las fracciones como partes de unidad, como suele ser el caso en general en la escuela básica, es necesario calcular el cociente y esto se puede hacer a través de alguno de los caminos que usaron los alumnos de las experiencias que se mostraron anteriormente en los contextos de reparto de pasteles, o de pasos de los robots, por ejemplo, mediante el siguiente razonamiento, «2 entre 5 es lo doble de 1 entre 5, esto es,  $2 \div 5 = 2 \times (1 \div 5) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ ».

Es muy probable que, al hallar los cocientes fraccionarios de divisiones como las que hemos visto en las experiencias anteriores, los alumnos, además de establecer un algoritmo que proporciona el resultado de la división ( $a \div b = \frac{a}{b}$ ), puedan adquirir las bases para comprender que las fracciones también pueden definirse como cocientes<sup>23</sup>.

La explicitación de esta doble definición puede hacerse hasta el nivel de secundaria; en la primaria, es posible propiciar que los alumnos la manejen implícitamente, al establecer, en por lo menos un contexto, que el resultado de la división  $a$  unidades entre  $b$  es la fracción  $\frac{a}{b}$  de unidad.

## Capítulo 2.

### Las fracciones en el papel de razones

Dos jugadoras de básquet juegan a encestar. Valeria encestó 14 tiros de 21; Tatiana encestó 16 de 24. ¿Qué jugadora tuvo mejor desempeño?

*Mauro: El mejor puesto sería Valeria. (Pausa) Solo le faltaron 7. Y a Tatiana le faltaron*

*8. (Escribe) «Valeria primer puesto».*

*Axel: Aquí, primero es Tatiana (Indica el primer puesto)*

...

*Aline: Tú dijiste que Tatiana tiró mejor.*

*Mauro: Sí, pero los que no encestó, le faltaron, ¿cuántos?, le faltaron 8 (Indica en su hoja)*

...

*Mary tiró 24 veces y encestó 8...*

*Mauro: ¡Le faltaron dos tercios!*

*Aline: No, porque Mary tiró 24 veces. Es muchísimo. Y encestó... encestó 8. Perdió 16 tiros.*

*Mauro: Por eso, esa es peor, ¡Le faltaron dos tercios!*

*Aline: ¡Ah, sí!*<sup>24</sup>

Uno de los papeles fundamentales de las fracciones, además de expresar medidas de cantidades, es el de expresar *razones*

entre las cantidades, por ejemplo, cuando se dice alguna de las siguientes expresiones:

«la mezcla se prepara con  $\frac{2}{3}$  de pintura roja y  $\frac{1}{3}$  de agua»;  
« $\frac{3}{4}$  partes de la población mayor de 15 años tiene estudios de secundaria»;  
«un poco más de la mitad de la población son mujeres».

En todas estas expresiones, lo que interesa no es el tamaño de las cantidades mencionadas, sino la relación de tipo multiplicativo que hay entre ellas; no interesa saber cuánta pintura se hace, sino qué parte de cualquier cantidad de cierta mezcla, debe ser pintura.

Por otra parte, los porcentajes son fracciones de denominador 100, especializadas en expresar razones, por ejemplo: «todos los productos de la tienda tienen 10% de descuento», significa que cualquiera que sea el precio, se descuenta  $\frac{10}{100}$  del mismo; o bien, «la producción de petróleo de este año fue el 75% de la del año pasado», expresión que no informa de qué tamaño fueron las producciones en esos años, sino la relación entre ambas.

En la enseñanza, la noción de razón está en el cruce de otros dos temas fundamentales: la proporcionalidad y los números racionales, por lo que el estudio de la noción de razón lleva a favorecer aprendizajes de proporcionalidad y, al mismo tiempo, de fracciones.

En la secuencia que se presenta en este capítulo se analizan primero situaciones en las que las fracciones se dejan implícitas y las razones se expresan mediante parejas de números naturales, con lo cual se favorecen razonamientos sobre la proporcionalidad. En un segundo momento, las fracciones se hacen explícitas en su papel de razones. El estudio de las razones continúa en el capítulo siguiente, en articulación con la multiplicación de fracciones y decimales.

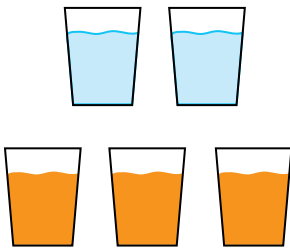
## Tema 1. La comparación de razones sin fracciones

Se revisará primero un problema típico de comparación de razones que consiste en comparar el sabor de dos naranjadas. Después, se analizarán procedimientos que alumnos de quinto y sexto grados de primaria pusieron en marcha para resolver las situaciones de comparación de razones «Los tratos» y «Los saltos de las ranas».

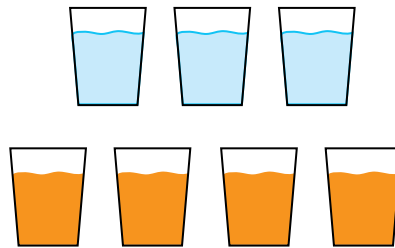
### 1.1 ¿Qué naranjada sabe más a naranja?<sup>25</sup>

Sergio prepara la naranjada poniendo dos vasos de agua por cada tres de jugo. En cambio, Mario pone tres de agua por cada cuatro de jugo. ¿Alguna de las naranjadas sabrá más a naranja o sabrán igual?

Sergio



Mario



### Actividad 2.1 Resoluciones con y sin fracciones

Dé un ejemplo de resolución del problema anterior sin usar fracciones y otro con ellas.

### *La noción de razón*

Un mayor o menor sabor a naranja no depende solamente de la cantidad de vasos de jugo, también depende de la cantidad de vasos de agua, es decir, depende de la *relación* entre las dos cantidades. Esta relación se llama **razón**. En el lenguaje común también se le llama «proporción»<sup>26</sup>. Una razón puede expresarse con dos cantidades, por ejemplo, «3 vasos de agua por cada 2 de jugo» (razón parte-parte), o «de cada 5 vasos de naranjada, 2 son de jugo» (razón parte-todo).

A continuación, se revisan algunos posibles procedimientos de resolución que no incluyen el uso de fracciones, pero en los cuales subyacen conocimientos de proporcionalidad, así como propiedades de la división.

### *Procedimientos cualitativos*

Los procedimientos llamados *cualitativos* permiten hacer estimaciones y obtener conclusiones al establecer diversas relaciones entre las cantidades, ya sea sin calcular o con pocos cálculos. Por ejemplo, se puede considerar que la naranjada de Sergio tiene 2 vasos de jugo y también 2 vasos de agua, más un vaso extra de jugo que se diluye en los otros cuatro; mientras que la naranjada de Mario tiene 3 vasos de jugo y 3 de agua, y también un vaso extra de jugo, pero este se diluye más, en 6 vasos. De lo anterior, se puede desprender que la naranjada de Sergio sabe más a naranja.

## Actividad 2.2

### Comparaciones cualitativas de razones

A continuación, en cada inciso, se describen una o varias condiciones que cumplen las cantidades de vasos de agua y de jugo de dos naranjadas. En cada caso infiera, sin hacer cálculos, qué naranjada sabrá más a naranja. Luego, en cada inciso, dé un ejemplo de dos naranjadas que cumplan con esas condiciones.

- a) La naranjada A tiene más agua que jugo, mientras que la naranjada B al revés, tiene más jugo que agua por lo tanto...
- b) En la naranjada A, más de la mitad de la naranjada es jugo, mientras que en B menos de la mitad de la naranjada es jugo, por lo tanto...
- c) La naranjada A tiene el doble de vasos de agua que la naranjada B, pero menos del doble de vasos de jugo que la B, por lo tanto...

#### SOLUCIONARIO

## Actividad 2.3

### Igualar un término para comparar

- a) Las siguientes preguntas refieren a la situación inicial (naranjada de Sergio, «2 de agua por 3 de jugo», naranjada de Mario, «3 de agua por 4 de jugo»):

¿Cuántos vasos de jugo debe poner Sergio por cada 6 vasos de agua, para que siga teniendo el mismo sabor? ¿Cuántos vasos de jugo debe poner Mario por cada 6 vasos de agua para que conserve su sabor? Por lo tanto, ¿qué naranjada sabe más a naranja?

- b) Observe que al haber la misma cantidad de vasos de agua en ambas naranjadas (6 vasos), ya se puede saber muy fácilmente cuál sabe más a naranja: basta con comparar las cantidades de vasos de jugo. Encuentre otras cantidades de vasos de agua, o de jugo, con las que se puedan comparar de manera similar las naranjadas de Mario y de Sergio.

### *Razones equivalentes y el procedimiento de igualar un término...*

En la naranjada de Sergio, las razones «2 de agua por 3 de jugo» y «6 de agua por 9 de jugo» corresponden al mismo sabor. Podemos decir que son razones equivalentes. La equivalencia es una propiedad fundamental de las razones. Puede enunciarse en general diciendo que, cuando se multiplican los dos términos de una razón por un mismo número, se obtienen razones equivalentes.

Un procedimiento para resolver problemas de comparación de razones, usando números naturales sin recurrir aún a las fracciones, consiste en generar razones equivalentes a una de ellas o a ambas, hasta tener un par de razones con un término común, como en la actividad anterior.

El procedimiento de igualar términos, requiere determinar múltiplos comunes de las dos cantidades de vasos de agua o de las dos cantidades de vasos de jugo. En el ejemplo anterior, 6 es múltiplo común de 2 y de 3. Los alumnos no suelen saber que hace falta un múltiplo común, es algo que aprenden sobre la marcha.

Sergio	
Agua	Jugo
2	3
<b>6</b>	<b>9</b>

Mario	
Agua	Jugo
3	4
<b>6</b>	<b>8</b>

Cabe recordar que en el capítulo 1 de este volumen se vio un caso de comparación de razones, en el que las fracciones están implícitas: se trataba de comparar resultados de repartos (se les llamó cocientes indicados), a partir del número de pasteles y de niños de cada uno. También en ese caso subyace un recorrido en el que primero se pueden usar razones, y después fracciones.



### *Un error frecuente e importante: el procedimiento aditivo*

Un procedimiento erróneo, frecuente en la resolución de problemas de proporcionalidad, es el llamado «aditivo», en el que se consideran las *diferencias* entre las cantidades (o términos) en lugar de los cocientes (o factores). Por ejemplo, en el problema anterior, una respuesta errónea de ese tipo es:

«Las dos naranjadas saben igual porque en las dos hay **un vaso más** de jugo que de agua.»

Los alumnos consideran que, si la diferencia entre los vasos de agua y de jugo de cada naranjada es la misma, las naranjadas sabrán igual. Para poner en duda este razonamiento, se puede recurrir al siguiente ejemplo extremo: si una naranjada A tiene 2 vasos de jugo y 1 de agua, y una naranjada B tiene 10 vasos de jugo y 9 de agua, ¿Saben igual por tener ambas un vaso más de jugo que de agua? En A, hay el doble de jugo que de agua, mientras que en B, hay casi lo mismo de jugo que de agua, por lo tanto no pueden saber igual.

En el ejemplo anterior se propició un razonamiento *cualitativo*: se generaron dos razones que tuvieran la misma diferencia absoluta entre sus términos (un vaso más de jugo que de agua), de tal manera que fuera evidente que las razones resultantes no eran equivalentes.

Investigaciones sobre el desarrollo del razonamiento proporcional de niños de entre 7 y 12 años, han mostrado que respuestas erróneas como el procedimiento aditivo que acabamos de ejemplificar, reflejan, no obstante, un avance en el desarrollo de su pensamiento, pues dejan ver que: 1) ya se dan cuenta de que las variables dependen una de la otra y que si una aumenta, la otra también debe aumentar, y 2) los niños sospechan que debe haber algo que se conserve, una regu-

laridad, aunque aún no logran determinarla correctamente (Inhelder y Piaget, 1955).

Superar este tipo de errores forma parte del proceso de aprender a manejar relaciones proporcionales. Los procedimientos aditivos suelen reaparecer más allá de la adolescencia, por lo que en las aulas es necesario seguir trabajando sobre estos<sup>27</sup>.

Para ayudar a superar el error aditivo se recomienda usar contextos en los que las magnitudes y la relación entre ellas sean conocidas y fáciles de comprender por los alumnos así como brindarles la posibilidad de verificar las respuestas de manera concreta, al menos las primeras veces. El contexto de las naranjadas tiene la ventaja de ser accesible —es fácil prever que, entre más jugo, mayor es el sabor a naranja, y entre más agua, menor— pero tiene la desventaja de que es difícil verificar las respuestas físicamente, por lo que puede ser complicado evidenciar los errores; ni siquiera haciendo las naranjadas y probándolas es seguro que se pudiera saber con certeza cuál sabe más a naranja. A continuación, se enlistan algunos contextos en los que la verificación es más accesible.

- El trueque: se comparan reglas de cambio del tipo, por cada  $n$  se dan  $m$ , por ejemplo, «A da 2 estampas por cada 3 fichas, B da 3 estampas por cada 5 fichas, ¿con quién conviene cambiar las fichas?» (Block, 2006b).
- Longitudes expresadas por relaciones de conmensuración, por ejemplo, se compara el tamaño de los saltos de dos ranas que brincan sobre una recta numérica, una da 3 saltos y avanza 4 unidades, la otra da 4 saltos y avanza 5 unidades (Block y Martínez, 1999; Block, 2021).
- En la escala, se comparan reproducciones hechas con razones del tipo siguiente: «a un lado de 4 cm de la figura original A le corresponde un lado de 3 cm en la copia A',

y a un lado de 7 cm de la figura original A, le corresponden 5 cm en la copia A'. ¿Qué figura será más grande, A o A'?»<sup>28</sup> (Block, García y Balbuena, 2020).

- Contextos que apelan a consideraciones de justicia o de generosidad, por ejemplo: Laura y Raquel regalaron estampas a Víctor, quien perdió las suyas. Laura tenía 10 estampas y le regaló 5, Raquel tenía 5 estampas y regaló 3. ¿Quién fue más generosa? En estos contextos, las respuestas que dan los alumnos dependen frecuentemente de factores subjetivos, por ejemplo, puede haber quien piense que Laura fue más generosa porque dio más estampas, y quien piense que fue Raquel pues dio más de la mitad de lo que tenía. Es el debate, la argumentación, lo que hace interesante a la situación<sup>29</sup>.

---

### Actividad 2.4

#### ¿Una razón es un número?

Ya se vio que la intensidad de sabor a naranja depende de dos cantidades: la de vasos de jugo y la de vasos de agua, y más precisamente, depende de cierta relación entre esas cantidades. Esa relación es una razón. La pregunta es:

La razón entre dos cantidades, ¿también es un número?

Expresa lo que piensa al respecto y contrástelo con la información que se proporciona enseguida.

---

*¿Es la noción de razón un número o es una relación entre dos números?*

Una *razón* es, en primer lugar, una relación entre dos cantidades, pero a toda razón se le puede asociar un número, llamado

*el valor de la razón*<sup>30</sup>. Por ejemplo, el valor de la razón que guarda 8 con respecto a 4 es 2, o «doble». El valor de la razón que guarda 4 con respecto a 8, es  $\frac{1}{2}$ . En este último caso, una fracción juega el papel de razón.

Aunque la razón entre dos cantidades ( $a$ ,  $b$ ) y el número que la expresa ( $\frac{a}{b}$ ) tienden a confundirse, hay circunstancias en las que conviene distinguirlos<sup>31</sup>. Una de estas circunstancias ocurre justamente en la enseñanza: los alumnos pueden **no** saber, por ejemplo, que el valor de la razón «2 por cada 3» es  $\frac{2}{3}$  o 0.66 y, sin embargo, pueden saber que un impuesto de «2 pesos por cada 3» es equivalente a uno en el que cobran «4 pesos por cada 6», pero es mayor que otro en el que nada más cobran «2 pesos por cada 10». Es decir, no conocer el número que expresa al valor de una razón, no necesariamente impide trabajar con esa razón. Existe la hipótesis de que, en un proceso de aprendizaje, el trabajo con razones del tipo «por cada 2, 3» o «2 para cada 3», además de favorecer el desarrollo de la noción de proporcionalidad, podría constituir un antecedente para la comprensión de las fracciones como « $\frac{2}{3}$  de», en su papel de expresar razones<sup>32</sup> (Block, 2008).

A continuación, se presentan resoluciones de alumnos de quinto y de sexto grados frente a dos secuencias de problemas de comparación de razones<sup>33</sup>. Lea cada reporte y conteste lo que se pregunta.

## 1.2 ¿Qué trato conviene más?

Esta secuencia se planteó en un grupo de quinto grado y en uno de sexto grado. Uno de los problemas fue el siguiente:

Varios niños deciden trabajar durante las vacaciones en las huertas cercanas a sus casas. El trabajo que les ofrecen es recoger las naranjas que ya se cayeron. Cada agricultor les ofrece un trato distinto. Los niños tienen que averiguar qué trato les conviene más.

- En la huerta «Sonora» les ofrecen: Por cada 3 naranjas que recojan, se quedan con 2.
- En la huerta «Vista Hermosa» les ofrecen: Por cada 10 naranjas que recojan, se quedan con 9.

¿Cuál de los dos tratos les conviene más?

---

### Actividad 2.5

#### ¿Cuál de los tratos conviene más?

Resuelva el problema anterior y reflexione sobre cómo cree que lo resolverían alumnos del último ciclo de primaria (quinto y sexto) o de primero de secundaria.

---

El problema implica comparar dos razones (por cada 3 naranjas, 2 naranjas y por cada 10 naranjas, 9 naranjas). Las fracciones que expresan el valor de estas razones son  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{9}{10}$ . Una de las formas posibles de resolución consiste en determinar y comparar esas fracciones. Sin embargo, solo un alumno de sexto grado resolvió el problema mediante la comparación de fracciones. En ambos grupos, la mayoría se dio a la tarea de generar parejas de cantidades a partir de cada uno de los tratos, con la idea de igualar un término para así comparar. Obtuvieron, por ejemplo: por cada 30, 20 vs por cada 30, 27. Veamos algunas de las dificultades que enfrentaron.

Adriana (alumna de quinto grado) estimó primero que de las razones «por cada 3, 2» y «por cada 10, 9», convenía más

la segunda. Para estar segura, generó otros pares iterando los términos, con el propósito de igualar los primeros términos de cada pareja (3 y 10) a 20. No previó que 20 no es múltiplo de 3.

Sonora	
3	2
6	4
...	...
<b>21</b>	14

Vista Hermosa	
10	9
<b>20</b>	18

Adriana obtuvo las parejas: «por 21, 14» y «por 20, 18», y con ellas logró concluir (...).

Varios alumnos hicieron algo similar. Resolvieron como si no existiera un múltiplo común y terminaron encontrando dos razones en las que el primer término de una fuera mayor que el primer término de la otra, pero el segundo término fuera menor. Manuel, de sexto grado, después de haber resuelto algunos problemas parecidos, al resolver el problema anterior —por cada 3, 2 vs por cada 10, 9—, intenta formular este procedimiento:

*Manuel: (...) Porque ve, el 2 debe superar al 9... o bueno, 3 para superar al 10...*

*(Manuel genera entonces la razón «por 12 naranjas, 8 naranjas», equivalente a «por 3, 2» de la huerta «Sonora» y la compara con «10 naranjas, 9 naranjas» de la huerta «Vista Hermosa»)*

*Manuel: En la primera huerta, por más naranjas recogidas, les dan menos.*

Estas resoluciones ofrecen una posibilidad para plantear la cuestión de la existencia de los múltiplos de dos números, ¿existen siempre?, ¿cómo se pueden encontrar?

## Actividad 2.6

### Razonamientos de alumnos I

- Explique cuál pudo ser el razonamiento de Adriana que le permitió concluir. [SOLUCIONARIO](#)
- En caso de respuesta errónea, o de duda, explique cómo podrían verificar empíricamente la respuesta. [SOLUCIONARIO](#)

### 1.3 ¿Qué rana da saltos más grandes?<sup>34</sup>

Se trata de comparar los tamaños de saltos de dos ranas que avanzan a lo largo de una recta numérica, a partir de dos valores que están asociados a cada rana: número de saltos que da y distancia total que avanza en ese número de saltos. El tamaño de cada salto puede ser un número de unidades entero o no entero.

Esta secuencia se trabajó en quinto grado de primaria. Se utilizó un programa de computadora en el que, al introducir los dos datos de cada rana (número de saltos y distancia total avanzada) se podía ver a las dos ranas saltar, y así comparar visualmente el tamaño de los saltos (ver figura 15). Esto permitía una verificación de las respuestas obtenidas por los alumnos.

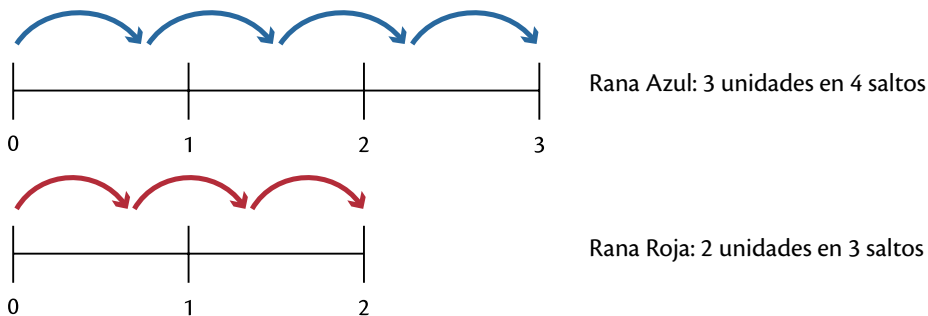


Figura 15. Representación en computadora de los saltos de las ranas

## Primera parte. Procedimientos cualitativos para comparar dos razones

Se planteó a los alumnos una actividad introductoria, en la que debían comparar los tamaños de los saltos de dos ranas, la verde y la morada, mediante procedimientos cualitativos:

*La rana verde y la rana morada hicieron cuatro competencias. En cada competencia cambiaron el tamaño de sus saltos. Escribe el color de la rana a la que le apuestas en cada competencia y explica por qué. Recuerda: no gana la que dé más saltos ni la que recorra más distancia, sino la que dé saltos más grandes*

Se les entregó una ficha con los datos de cada una de las cuatro competencias y con las preguntas correspondientes. En la figura 16 se muestra la parte de la ficha que corresponde a la primera competencia. En la figura 17 se muestran los datos que se utilizaron en las cuatro competencias

Rana verde		Rana morada	
Recorrido	# de saltos	Recorrido	# de saltos
12 metros	12 saltos	7 metros	5 saltos

La rana que da saltos más grandes es: \_\_\_\_\_  
 Porque: \_\_\_\_\_

Figura 16. Primera competencia

Competencia	1ª	2ª	3ª	4ª
Rana verde	12 metros (m), 12 saltos (s)	28 m, 5 s	30 m, 8 s	24 m, 5 s
Rana morada	7 m, 5 s	36 m, 5 s	30 m, 11 s	15 m, 8 s

Figura 17. Las cuatro competencias



## Actividad 2.7

### Comparaciones sin hacer cálculos

En todos los casos es posible comparar sin transformar los pares (y por lo tanto sin hacer cálculos), explique en cada caso cómo se puede hacer. **SOLUCIONARIO**

La actividad anterior fue resuelta en parejas. A continuación, se muestran tres respuestas a la 4ª competencia (verde —24m, 5s— vs morada —15m, 8s—).

*Rachid: (Señalando la cuarta columna de la tabla dice). Aunque la rana morada tenga menos metros que la verde, la verde hace 5 saltos, que es menor que 8 saltos, pero también eso equivale a que... el número mayor de saltos... ¿cómo lo podría decir?... a que el número mayor tiene más chicos los saltos que el número menor.*

*Arith: (La verde porque) es más grande su recorrido y sus saltos son menos.*

*Itzel: ¡Ah! Entonces la verde, porque la morada tiene el espacio más chico, pero da 8 saltos y la verde tiene el espacio más grande y da menos saltos.*

## Actividad 2.8

### Razonamientos de alumnos II

Explique con sus palabras el razonamiento de Rachid, Arith e Itzel que se presentó enseguida de la actividad 2.7 **SOLUCIONARIO**

## Segunda parte. Formulación de criterios generales

A continuación de la actividad anterior, en la clase siguiente, se planteó un ejercicio de formulación de criterios generales: se les pidió que expresaran la condición que deben cumplir los dos datos de la rana verde para que sus saltos resulten más chicos que los de la rana morada.

Los alumnos propusieron dos reglas:

*Ehécatl: Es que cuando pones menos saltos y más recorrido en la morada, gana la morada.*

*Miguel: No importa el número de metros que recorra la rana (morada) sino los saltos que va a dar.*

Se revisará aquí la discusión de la segunda regla, la que dijo Miguel. Las opiniones se dividieron, algunas, mostraron escepticismo, por ejemplo, Julio dijo: «*Es que habría veces que ganaría y otras que perdería*». La mayoría apoyó el criterio dicho por Miguel, quien al parecer tenía cierto liderazgo. Sin embargo, los argumentos fueron escasos. La primera prueba empírica que se planteó, con datos propuestos por el mismo Miguel, permitió validarla: en la computadora se mostró con claridad que los saltos de la morada son más grandes:

Rana verde	
Recorrido	# de saltos
18	5

Rana morada	
Recorrido	# de saltos
13	3

La maestra propuso hacer una segunda prueba, respetando la condición de Miguel —que la morada diera menos saltos [que la rana verde], y sin importar el recorrido— y, con la participación de los alumnos, propuso datos con los que fuera fácil ver que el criterio de Miguel era erróneo:

Rana verde	
Recorrido	# de saltos
50	13

Rana morada	
Recorrido	# de saltos
2	3

La maestra invitó a los alumnos a que anticiparan cuál rana creían que iba a ganar. Las preferencias se dividieron, pero la mayoría estuvo a favor de la morada. Entre el murmullo se escuchó a un alumno decir «*es menos de un entero*» (el salto), lo que indica que se dio cuenta de que el número de saltos era mayor que el número de unidades recorridas. Enseguida, Miguel, autor de la propuesta, dijo, aunque no muy convencido:

Miguel: *Tiene que ser mayor el recorrido que el salto.*

Las intervenciones de Miguel y del otro alumno no fueron retomadas. La maestra introdujo los datos de la competencia en la computadora y se evidenció que la rana morada perdía. Varios niños se mostraron sorprendidos.

Cuando la maestra pidió explicaciones de por qué perdió la morada, Miguel, más convencido, agregó una condición implícita, que el salto fuera mayor que el entero: «*Porque en la morada fue menor que un entero*». Se probó de nuevo con los mismos datos para la rana la verde, y, para la rana morada, se invirtieron los números:

Rana verde	
Recorrido	# de saltos
50	13

Rana morada	
Recorrido	# de saltos
3	2

Volvieron a surgir distintos puntos de vista, pero fueron más los alumnos que apostaron por la rana morada. La maestra

volvió a pedir argumentos, y ninguno opinó, el autor del criterio en discusión parecía inseguro. Otra vez se ingresaron los datos a la computadora y nuevamente varios niños se mostraron sorprendidos con los resultados.

### Actividad 2.9

#### Razonamientos de alumnos III

Describa con sus palabras los razonamientos de los alumnos y las estrategias del docente. **SOLUCIONARIO**

#### *Comparar razones implica coordinar variables*

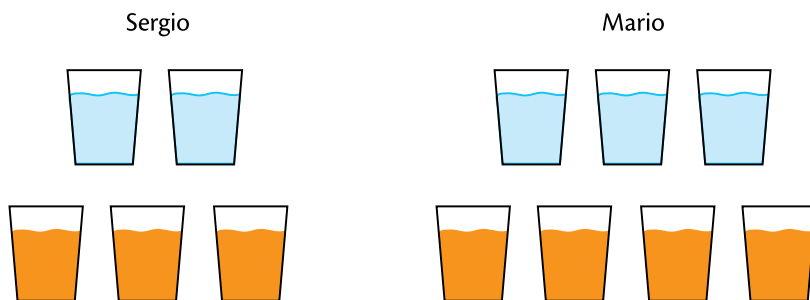
En las situaciones anteriores los alumnos compararon razones, a las que corresponden fracciones que todavía no se expresan como tales, que se dejaron implícitas<sup>35</sup>. Con ello, se buscó que desarrollaran su conocimiento sobre las relaciones en juego: ¿qué pasa con el tamaño del salto cuando varía el número de saltos, o cuando varía la distancia recorrida?, ¿es posible prever qué saltos serán más grandes?, ¿es posible que los saltos sean del mismo tamaño? Cabe observar que esta última pregunta llevará a coordinar dos variables —cantidad de saltos y distancia avanzada— que varían proporcionalmente cuando el tamaño de los saltos no se altera. Al mismo tiempo, con esta actividad se buscó sentar las bases para hacer intervenir, más adelante, a las fracciones. En el siguiente tema se analizarán situaciones de otro estudio, en las que se propicia el uso de las fracciones.

## Tema 2. Las razones se expresan con fracciones

### 2.1 Un primer ejemplo

Volvamos al problema de averiguar qué naranjada sabe más a naranja, para ver una resolución usando fracciones.

Sergio prepara la naranjada poniendo tres vasos de jugo por cada cinco de naranjada; Mario pone cuatro de jugo por cada siete de naranjada. ¿Qué naranjada sabe más a naranja?



Cabe observar que esta vez acudimos a las relaciones «parte-todo» entre cantidades de *naranjada* y de jugo, en lugar de a las relaciones «parte-parte» entre cantidades de agua y de jugo. Esto es porque las relaciones «parte-todo» evocan de manera más natural a las fracciones.

El problema se puede resolver determinando qué parte de la naranjada representa el jugo (o el agua) en cada una:

*$\frac{3}{5}$  de la naranjada de Sergio es jugo, y  $\frac{4}{7}$  de la naranjada de Mario es jugo.*

Nótese que las fracciones expresan aquí razones, esto es, relaciones entre cantidades. Para compararlas, se pueden sustituir por fracciones equivalentes que tengan el mismo denomina-

dor:  $\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$  y  $\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$ . Por lo tanto, la naranjada de Sergio sabe más a naranja.

### Actividad 2.10

#### ¿Qué ventaja aportan las fracciones?

Reflexione sobre las siguientes preguntas y contraste sus respuestas con el texto que sigue.

¿Las fracciones aportan alguna ventaja en comparación con las resoluciones sin fracciones que vimos en el apartado anterior? ¿Cuál? ¿Qué dificultades pueden preverse?

#### *La fracción, una expresión de la relación entre cantidades que se independiza de las cantidades*

En la situación de las naranjadas, al expresar las razones con fracciones, se logra que las razones se muestren independientes de las cantidades; es decir, se gana en generalidad. Cuando se dice « $\frac{3}{5}$  de la naranjada de Sergio es de jugo», no se está informando cuántos vasos de jugo, o de agua, o de naranjada hay; podrían ser, por ejemplo, 30 de naranjada, de los cuales 18 son de jugo y 12 de agua, o 100 de naranjada, de los cuales 60 son de jugo y 40 de agua. Lo que informa la fracción  $\frac{3}{5}$  es únicamente la relación que hay entre la cantidad de naranjada y la de jugo. La fracción  $\frac{3}{5}$ , en este caso, expresa una misma intensidad de sabor a naranja, la cual se puede lograr con distintos pares de cantidades. Además, al expresar las razones con fracciones, las técnicas para comparar y operar con fracciones están a disposición del trabajo con razones.

Sin embargo, como se verá en este capítulo, propiciar que los alumnos expresen las razones con fracciones no es sencillo, va más allá del ejercicio trivial de decirles «a por cada b»

ahora se escribe  $\frac{a}{b}$ , y tampoco lo es manipular las fracciones. Paradójicamente, es en el papel de expresar razones en el que, es probable que usar fracciones tenga más sentido que usar decimales. A continuación, se presentan algunas situaciones que buscan introducir la expresión de razones con fracciones, acompañadas de las resoluciones de alumnos, en las que se podrán identificar las dificultades ya referidas.

## 2.2 Un caso de uso espontáneo de las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ , en sexto grado<sup>36</sup>

A continuación, se presenta la manera en que una alumna de sexto grado resolvió el problema de los tratos que se mencionó anteriormente (¿Qué trato conviene más?). Los tratos que comparó fueron: «por cada 5 naranjas que recojan se quedan con 2» y «por cada 20 naranjas que recojan se quedan con 6». En el proceso de resolver puso en juego dos fracciones,  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{3}$ , para dar cuenta del valor aproximado de los dos tratos y así poderlos comparar. Las fracciones asumen así el sentido pleno de razones.

Esta alumna resolvió en tres momentos. Dio inicio con la comparación de las razones «por cada 5, 2» y «por cada 20, 6» contra la fracción « $\frac{1}{2}$  de»:

*Mariana: Ah... creo que estoy descubriendo un tip... se trata de que aquí... si recogen 5, se quedan con 2 (...), se quedan con casi la mitad, y los otros, recogen 20 y ustedes se quedan con 6, pero están recogiendo más naranjas, por eso les dan más, pero aquí **no les están dando algo que se parezca a la mitad**, 7 u 8 naranjas. Por eso aquí es más justo (en 5, 2).*

Puede observarse la intención de considerar *la relación entre las cantidades*: no basta con saber que en un caso dan **más**

naranjas que en el otro, puesto que son a cambio de **más** naranjas recogidas. La intención de considerar las razones y no las cantidades, cristaliza en la cuantificación aproximada de una de las razones: estima que (por cada 5, 2) es «casi la mitad» y que, si se recogieran 20 naranjas —«casi la mitad»— serían 7 u 8, pero no 6». Resumiendo:

$$(5, 2) \approx \text{«casi } \frac{1}{2} \text{ de} \approx (20, 8)^{37} \text{ y} \\ (20, 6) < (20, 8)$$

Enseguida, opta por iterar el par (por cada 5, 2) y obtiene (por cada 10, 4). Le surge entonces una duda:

*Mariana: Aquí (5, 2), si recogen 10 naranjas, si pensamos en la segunda vuelta, recogen 10 naranjas, se quedan con 4 y allí ya no es la mitad.*

*Entrevistadora: ¿Cuál es la mitad de 10?*

*Mariana: 5, ah..., no... (rectifica), a mí se me hace que les conviene más el otro, el primero, el de 5 y les dan 2, porque siempre les están dando casi la mitad de las naranjas, y en el otro les dan más naranjas, pero no les dan casi la mitad.*

Una vez confirmado que 4 también es «casi la mitad» de 10, como 2 lo es de 5, Mariana generaliza: «**siempre** les dan casi la mitad», es decir, en todas las parejas de cantidades que se generen a partir de «por cada 5, 2» una cantidad es «casi la mitad» de la otra. Emerge una idea de *constante*, en una situación en la que los datos varían.

Finalmente, opta por generar otras parejas. Sobre la marcha encuentra que del trato «6 de 20» se genera «30 de 100» y observa que «30 de 100» es cercano a «30 de 90», y por lo tanto es «casi  $\frac{1}{3}$ »:



*Mariana: (...) «30 y 30, 60, (y 30) 90, serían tercios (dibuja un círculo pequeño, lo divide en tres partes, como un pastel, en cada parte anota 30) entonces aquí le está dando casi la mitad y aquí un tercio, así, el tres tercios tiene tres tercios y nada más le está dando un tercio.*

La última frase («tres tercios tiene tres tercios y nada más le está dando un tercio») puede interpretarse como un intento de destacar que en ese caso la relación es «uno de tres». La fracción  $\frac{1}{3}$  emerge nuevamente como la expresión de una razón constante entre cantidades, en la que las cantidades no figuran más. En síntesis:

el trato «por cada 20 te doy 6» lleva a «por 100 te doy 30» (repitiendo 5 veces la acción) y «por 100 te doy 30» es cercano a «por 90 te doy 30», el cual equivale a dar  $\frac{1}{3}$ . Es decir: «por cada 20, 6» = «por cada 100, 30»  $\approx$  «por cada 90, 30» = « $\frac{1}{3}$  de».

### Actividad 2.11

#### Dos usos, dos significados de las fracciones

¿Qué diferencia encuentra usted entre el uso de la fracción  $\frac{1}{3}$  cuando se dice «me comí  $\frac{1}{3}$  de naranja», con el uso que la estudiante le da aquí, cuando dice «nada más le están dando  $\frac{1}{3}$ ». **SOLUCIONARIO**

#### *El sentido de la fracción como razón*

«Estas relaciones entre parejas de cantidades concretas que varían (6 de 20 vasos, 12 de 40, 18 de 60, etc.) y el número que expresa lo que es invariante («casi  $\frac{1}{3}$ »), así como las dudas que

surgen en el proceso, parecen constituir una parte esencial del sentido de la noción de fracción como expresión de una razón constante (...)» (Block, 2008, p. 502).

En el problema de «Los tratos» que analizamos en este apartado, la formulación «por cada» favorece la suma término a término (por cada 5, te doy 2; por cada 10, te doy 4; por cada 15, te doy 6, etc.), y también la multiplicación de los dos términos por un mismo número (por 3 veces 5, te doy 3 veces 2). Además, el problema tiene características que facilitan el uso de la fracción: las magnitudes son de la misma naturaleza y la relación es entre un todo y una parte.

El análisis de las resoluciones de este tipo de problemas permitió mostrar, en primer lugar, cómo los alumnos usan las razones y algunas de sus propiedades cuando aún no disponen de los números fraccionarios que cuantifican a estas razones. En segundo lugar, se pueden ver algunas formas en que las fracciones más simples,  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{3}$ , emergen en estos procedimientos, para expresar lo que tienen en común varias razones equivalentes, es decir, emergen como expresiones de una razón constante (Block, 2008).

---

### Actividad 2.12

#### Convertir una actividad de exploración en una situación didáctica

La actividad de «Los tratos» que se presentó anteriormente fue utilizada en un estudio que buscaba conocer las resoluciones de alumnos; tenía como único propósito la exploración. Sin embargo, con ciertas modificaciones, la situación podría convertirse en situación *didáctica*, con el propósito de que los alumnos utilicen algunas fracciones, unitarias como  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{3}$ , y algunas más como  $\frac{3}{4}$ , como razones, tal y como lo inició Mariana, en el caso que analizamos. Haga las adaptaciones que considere necesarias para que la situación funcione como situación

didáctica. Tenga en cuenta aspectos como el de la verificación. En las siguientes actividades se analizan situaciones que tienen el mismo propósito, el estudio de la razón como fracción, pero en otros contextos.

### 2.3 Ordenar razones, teniendo a la vista las fracciones que las representan<sup>38</sup> SECUNDARIA

En las siguientes situaciones aplicadas en primer grado de secundaria, se buscó que los alumnos empezaran a usar las fracciones para expresar razones.

#### Tiros a la canasta

La consigna fue la siguiente:

En la tabla están anotadas las veces que tiró cada uno de los chicos, las veces que encestró y qué parte del total de tiros encestró.

a. Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestró
Alberto		6	$\frac{1}{2}$
Mary	24		$\frac{1}{3}$
Manuel	25	10	
Valeria		14	$\frac{2}{3}$
Tatiana		16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20		$\frac{3}{5}$

- b. Ubica a los jugadores, indicando quiénes son los mejores y quiénes los peores encestadores al aro.

5to lugar	4to lugar	3er lugar	2do lugar	1er lugar

Cabe observar que, en esta actividad, los alumnos no tuvieron que generar las fracciones, puesto que ya estaban dadas (con excepción de una, la de Manuel). Se esperaba que las usaran en tanto razones.

### Actividad 2.13

#### Anticipar cómo resolverían los alumnos I

Resuelva los dos incisos de la actividad anterior, y para cada uno exprese cómo se imagina que resolverían los alumnos de sexto grado de primaria o de primero de secundaria. [SOLUCIONARIO](#)

En el inciso **a** de la situación se pretendía que los alumnos expresaran las relaciones parte-todo con fracciones. Este inciso pudo ser resuelto por un buen número de alumnos; ¿significa que pudieron usar las fracciones como razones? No. Las dificultades aparecieron en el inciso **b**. Contra lo esperado, el hecho de tener a la vista las fracciones **no** llevó a los alumnos a considerarlas para ordenar a los jugadores, del mejor al menos bueno. Ordenar a los jugadores con base en su desempeño, causó en los equipos numerosas discusiones. Los alumnos oscilaron entre la comparación aditiva y la multiplicativa. A continuación, mostramos algunos fragmentos.

## Procedimientos en proceso

- Lo aditivo se impone en primera instancia: comparan el desempeño de los jugadores mediante la cantidad de tiros no encestados.

*Aline: Aquí (en el caso de Daniel) de 12 a 20 son 8. Le voy a apuntar 8 aquí, chiquito. Luego de 16 a 24...8 (refiriéndose al caso de Tatiana).*

*Mauro: De 14 a 21... 7 (refiriéndose al caso de Valeria). (...)*

*Aline: Los números que anoté aquí son las veces que perdieron.*

*Mauro: Entonces los peores serían estos tres de aquí (Señala en la hoja de Aline). El 7, 15 y el 16 (que corresponden a las diferencias entre 14 y 21, 10 y 25 y entre 8 y 24).*

- Emerge la consideración de una razón expresada con una fracción: la de los tiros no encestados con respecto al total de tiros.

*Mauro: (refiriéndose a Mary) ¡Le faltaron dos tercios!*

*Aline: No, porque Mary tiró 24 veces. Es muchísimo. Y encestó... encestó 8. Perdió 16 tiros.*

*Mauro: Por eso, esa es peor, ¡Le faltaron dos tercios!*

*Aline: ¡Ah, sí!*

El episodio anterior muestra que los alumnos entretejen, en su interacción, la consideración de cantidades absolutas y relativas: Mary falló en 16 tiros, cantidad absoluta que se ve grande, pero también ven que esa cantidad (16) re-

presenta  $\frac{2}{3}$  del total de tiros ( $\frac{3}{3}$ ), fracción que expresa una cantidad relativa, una razón, y confirma que lo fallado es considerable.

- En las resoluciones del caso de las jugadoras Valeria y Tatiana, pese a estar a la vista las fracciones «tiros encestados/total de tiros» explícitas e iguales ( $\frac{2}{3}$ ), dominó la opinión de que una es menos competente que la otra, por el hecho de que tiene mayor cantidad de tiros no encestados. Veamos como ejemplo la discusión entre Mauro, Axel y Aline.

*Mauro: El mejor puesto sería Valeria. (Pausa) Solo le faltaron 7. Y a Tatiana le faltaron 8. (Escribe) «Valeria primer puesto».*

*Axel: Aquí, primero es Tatiana (Indica el primer puesto).*

*Mauro: No.*

*Axel: Sí.*

*Aline: Tú dijiste que Tatiana tiró mejor.*

*Mauro: Sí, pero los que no encestó, le faltaron cuánto: le faltaron 8 (Indica en su hoja).*

Los alumnos hacen sus comparaciones tomando en cuenta las cantidades absolutas de tiros encestados o no encestados, y no la *relación* entre tiros encestados y total de tiros hechos, es decir, la razón. Para fijarse en esta razón, hay que dudar de las conclusiones que se obtienen sin ella. Para eso pueden ser muy útiles las contradicciones en las que caen: si se fijan en quién encestó más veces, es mejor Tatiana; si se fijan en quién falló más veces, es mejor Valeria.

En cierto momento, Mauro y Axel optaron por igualar el número de tiros realizados por las dos jugadoras, para

compararlas más fácilmente, pero lo hicieron también aditivamente.

*Mauro: (Enfático) Si este tuviera 24 (Refiriéndose a los 21 tiros de Valeria), le sumamos 3. Entonces a Valeria le sumamos 3 de los que anotó, serían 17. Serían 17, para que estén parejo 24 y 24. Serían 17. ¡Y aquí solo anotó 16! (Refiriéndose a Tatiana). ¡Y aquí serían 17! (Sonríe. Axel se queda dudando).*

Durante la puesta común, emergieron las contradicciones. Para algunos equipos, Valeria fue mejor jugadora que Tatiana y para otros, ambas debían estar en el primer lugar. Llama la atención que las fracciones, explícitas y visibles en la tabla desde el principio, no les hayan aportado información significativa para decidir quién jugó mejor. Es claro que aquí la dificultad, no fue poner la fracción, sino hacerle jugar el papel de una razón.

Probablemente por la presión del tiempo, la profesora no insistió en las contradicciones y optó porque se dieran a conocer otras resoluciones, esta vez correctas, que se muestran a continuación: conversión a fracciones equivalentes y el determinar los porcentajes como formas de comparar.

## Dos procedimientos correctos

- La comparación de fracciones mediante el uso de técnica del común denominador.

Un equipo ordenó las relaciones mediante la obtención de fracciones equivalentes con el mismo denominador —usaron como denominador al 30—, que es la resolución

que se esperaba favorecer. Para los demás, sin embargo, podría no ser claro el motivo por el cual el orden entre esas fracciones es a la vez el orden de los desempeños de los jugadores.

- La comparación mediante el cálculo de porcentajes de tiros encestandos respecto del total de tiros realizados.

Finalmente, analizaremos el trabajo de un equipo que puso en juego a los porcentajes como expresiones de las razones. Los porcentajes emergieron como expresiones más conocidas y fáciles de manipular que la expresión con fracciones (ver figura 18). Consciente del aporte que significaba, la profesora también dio un espacio a esta propuesta en la puesta en común.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestitó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$
Manu	25	10	$\frac{2}{5}$
Valeria	21	14	$\frac{2}{3}$
Tatiana	24	16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$

Handwritten calculations and percentages:

- For Alberto:  $3 \overline{) 100} 33$  (next to  $\frac{1}{2}$ )
- For Mary:  $3 \overline{) 24} 8$  (next to  $\frac{1}{3}$ )
- For Manu:  $5 \overline{) 20} 4$  (next to  $\frac{2}{5}$ )
- For Valeria:  $3 \overline{) 66} 22$  (next to  $\frac{2}{3}$ )
- For Tatiana:  $3 \overline{) 66} 22$  (next to  $\frac{2}{3}$ )
- For Daniel:  $5 \overline{) 60} 12$  (next to  $\frac{3}{5}$ )

b) Ubica a los jugadores, indicando quienes son los mejores y quienes los peores encestadores al aro.

5to puesto	4to puesto	3er puesto	2do puesto	1er puesto
Mary	Manu	Alberto	Daniel	Valeria Tatiana

Figura 18. Cálculo de porcentajes para comparar cantidades (hoja de Ana, equipo 6).



Las expresiones «de 12 tiros encestró 6», «encestró uno de cada dos tiros», «encestró  $\frac{1}{2}$  del total de tiros», y «encestró 50% del total», son equivalentes, expresan una razón. El porcentaje es probablemente la expresión más conocida de la razón. La estrategia de la profesora parece muy pertinente: relacionar el estudio de las fracciones, de las razones y del porcentaje.

En resumen, podemos decir que la comparación de la destreza de varios jugadores para encestrar, se reveló como una situación propicia para dar lugar a contradicciones entre criterios basados en cantidades absolutas, y también, entre esos criterios y los que tienen en cuenta la noción de razón. Sin embargo, la situación mostró un punto débil: no ofreció una forma de hacer evidentes los errores. La profesora tuvo que compensar esa falta de validación a partir de los propios datos, a través de un cuestionamiento directo acerca de los procedimientos utilizados o mediante la presión para que se mostraran los correctos.

## **2.4 Ubicar razones entre fracciones en la recta numérica**

### **El desempeño de las escuelas**

La siguiente situación consistió en comparar el desempeño de escuelas con base en el número de alumnos que aprueban un examen, considerando el total de alumnos de cada una, por ejemplo, en la escuela A, de 300 alumnos, aprobaron 70. Después de un trabajo preliminar sin fracciones (incisos 1 y 2a de la tarea que se muestra abajo), se buscó que los alumnos ubicaran las razones en una recta numérica, entre fracciones clave (inciso 2b).

Primero se planteó el inciso 1, y una vez contestado y discutido, se planteó el 2.

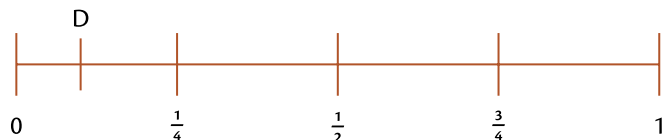
1. Analiza la tabla y contesta: ¿se puede saber qué escuela tuvo los mejores resultados en el examen? Explica tu respuesta.

Escuela	Alumnos aprobados
A	70
B	28
C	28
D	12

2. Los alumnos en cada escuela son:

Escuela	Total de alumnos	Alumnos aprobados
A	300	70
B	30	28
C	120	28
D	120	12

- a. Considerando el total de alumnos de cada escuela, ¿qué escuela tuvo los mejores resultados?, ¿y los peores?
- b. En la escuela D, menos de la cuarta parte de los alumnos pasó a la siguiente etapa de la competencia. Esa escuela se ubica en el primer intervalo de la recta de abajo. Ubica las otras escuelas. No necesitas ponerlas en el lugar exacto, solamente en el intervalo que les corresponde.



### Actividad 2.14

#### Anticipar cómo resolverían los alumnos II

Resuelva la actividad anterior, y prevea cómo contestarían alumnos de sexto grado o de primero de secundaria. ¿Considera que esta tarea podría ayudar a concebir a las fracciones que están en la recta ( $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ , etc.) como razones?

A continuación, se muestran las resoluciones al inciso **2b** que dieron algunos alumnos de un grupo de primer grado de secundaria. En varios equipos, lograron ubicar las escuelas, determinando a cuántos estudiantes corresponde  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{4}$  de la población total de cada escuela. Veamos cómo lo hace Axel.

(...)

Axel: Oigan, el C (28 de 120), es **menos de la cuarta parte** (Interrumpe)... Porque la cuarta parte de la D **sería 30**.

(...) (Ubica C entre D y  $\frac{1}{4}$ .)

(...)

Axel: (Continúa su cálculo mental, ahora aplica  $\frac{1}{4}$  a los 300 alumnos de la escuela A) 300 entre 2... 150... 75... Ah, no, sí, sí. (Escribe A entre C y  $\frac{1}{4}$ .)



Finalmente, Axel ubica B entre  $\frac{3}{4}$  y 1 y entrega su hoja, a partir de una estimación de que 28 de 30 es casi todo.



Varios alumnos hicieron razonamientos similares. De esta manera, lograron aproximar razones mediante las fracciones medios y cuartos. También lograron ver que, en este contexto, el valor máximo que puede tener una razón es 1, y que esto ocurre cuando el total de alumnos aprueba el examen.

De esta forma, ubicar razones expresadas como «tantos de tantos», entre fracciones, ayudó de manera notoria a vincular las nociones de razón y de fracción.

### 5. Comparar una razón expresada con una fracción, contra otras razones expresadas mediante un par de números naturales. SECUNDARIA

Siguiendo con la idea de introducir las fracciones directamente con la intención de que los alumnos las utilicen para expresar razones, se planteó la tarea siguiente:

Se sabe que  $\frac{3}{7}$  del total de alumnos de la escuela E aprobaron el examen, ¿se puede comparar con las escuelas anteriores? Si tu respuesta es sí, compárala; si es no, explica por qué.

#### Actividad 2.15 Anticipar cómo resolverían los alumnos III

Resuelva la actividad anterior, y prevea cómo la resolverían alumnos de sexto grado de primaria o de primero de secundaria.

La mayoría de los alumnos pareció descartar de entrada la posibilidad de que la fracción  $\frac{3}{7}$  aportara información. Para «desatorar» la situación, la profesora les ofreció varias ayudas: anotó en el pizarrón los datos de todas las escuelas, y añadió la escuela E; después planteó comparaciones de cada razón contra «la mitad» (por ejemplo, 70 es menos de la mitad de 300), pudieron ver que la fracción  $\frac{3}{7}$  sí aportaba información, puesto que podía saberse que en esa escuela habían pasado menos de la mitad de los alumnos; finalmente, los llevó a expresar todas las razones con fracciones (ver figura 19).

	Aprobado	Alumnos				
A	70	300	$\frac{7}{30}$	$\frac{70}{300}$	$\frac{35}{150}$	$\frac{7}{30}$
B	28	30	$\frac{28}{30}$			
C	28	120	$\frac{28}{120}$			
D	12	120	$\frac{12}{120}$			
E			$\frac{3}{7}$			

Figura 19. La actividad escrita por la maestra en el pizarrón

En un primer momento del trabajo en equipos, se observó que la mayoría de los alumnos no prestó atención a las fracciones recién puestas en el pizarrón. La mayoría seguía considerando que la escuela E no se podía comparar con las demás escuelas. Veamos partes del camino que se recorrió.

## Comparan con la razón $\frac{1}{2}$

En el equipo 3 convirtieron las fracciones a treintavos, pero varios consideraron que no era posible comparar con la escuela E ( $\frac{3}{7}$ ). La profesora aprovechó la intervención de un alumno para cuestionar la idea de la imposibilidad, mediante comparaciones con la razón  $\frac{1}{2}$ .

(...)

Andrés: (...) convertimos la C y la D a treintavos

(...)

Maestra: Okey, y entonces aquí teníamos treintavos, treintavos, treintavos... ¿y qué pasó aquí? ¿Cómo lo compararon? (Indicando la fila de la escuela E, con la fracción  $\frac{3}{7}$ )

	Aprobados	Alumnos		
3° A	70	300	$\frac{7}{30}$ ✓	
1° B	28	30	$\frac{28}{30}$	
3° C	28	120	$\frac{38}{120}$	$\frac{7}{30}$ ✓
5° D	12	120	$\frac{12}{120}$	$\frac{7}{30}$ ✓
2° E			$\frac{3}{7}$	

Andrés: Porque... **estuvo a punto de llegar a la mitad de (...)**

Maestra: Bien, eso es importante. Dicen ellos: casi hizo la mitad. ¿Alguno de los anteriores hizo menos de la mitad?

Alumnos: Sí

*Maestra: ¿Quién hizo menos (de la mitad)?*

*Alumnos: La A, C y D.*

*Maestra: Ellos hicieron menos. Entonces, ¿quién es mejor?... en relación a la E... o la A, o la B... o la C o la D.*

*Alumnos: La B*

*Maestra: Pero si yo les pregunto la A, la C, y la E, ¿quién es mejor?*

*Alumnos: La E*

*Maestra: ¿Por qué la E, Byron?*

*Byron: Porque la E casi llega a la mitad, y en la C le falta mucho para...*

*(...)*

Puede verse que los alumnos compararon las razones entre el número de aprobados respecto del número total por cada escuela, contra la razón privilegiada «la mitad»: en unas escuelas, aprobó más de la mitad, en otras menos, pero casi la mitad, y en otras mucho menos de la mitad.

### **Identifican un par de cantidades cuya razón es $\frac{3}{7}$**

Algunos alumnos descubrieron un par de cantidades cuya razón es, efectivamente,  $\frac{3}{7}$ : «Se trata de 3 alumnos aprobados de un total de 7».

*Byron: Nosotros diremos que lo hicimos así: (escribe)  
«Eran 3... eran 7 alumnos y nomás 3 pasaron, faltaron  
4. Y la B, tuvieron 28...*

*María: De 30*

*Byron: De 30. Y nada más faltaron 2.*

## Dudan entre un par o infinitos pares

La siguiente intervención de Byron es importante, deja ver que es posible generar varias parejas de datos cuya razón es  $\frac{3}{7}$ , pero expresa una duda, no se sabe cuál de ellas es la correcta, como si existiera una sola correcta:

*Byron: ¡De cuántos alumnos eran!... pues pueden ser ¡30, los que pasaron de 70!... ¡300 de 700!... ¡¡3 000 de 7 000!!... nunca sabremos la verdad... (pausa)*

Esta observación encierra una cuestión esencial de la noción de razón, a saber, que esta expresa la relación que guardan infinidad de pares de números —y no un solo par—, y que esa relación —y no las cantidades específicas— es lo que interesa en este ejercicio para valorar el desempeño de cada escuela.

---

### Actividad 2.16

#### ¿Cómo organizar el cierre de la actividad?

¿Cómo habría organizado usted el cierre de la actividad anterior? ¿Cómo habría recuperado la participación de Byron para el beneficio de todos? **SOLUCIONARIO**

---

## Usan el porcentaje como expresión de la razón

Una vez más, la noción de porcentaje surgió como portadora accesible de la noción de razón. Algunos alumnos la propusieron en la puesta en común:



*Marian: (...) sí se puede comparar porque... (Interrompe). Porque... haga de cuenta, los que restan... puede... **los podemos convertir en porcentaje del total** y así podemos saber esteee..., cuán... ¿qué porcentaje fue más grande o qué porcentaje fue menor y el menor porcentaje fue...?*

*(...)*

*Axel: Marian, lo que dijiste fue del total de alumnos sacamos un porcentaje (Gesticula con la mano con dedos extendidos)... Por ejemplo, el 7 es el 100 por ciento, ¿no? Y hay que investigar cuánto... un alumno, cuánto tiene de porcentaje en ese 100 por ciento.*

Ya hemos comentado que el porcentaje se revela como una de las pocas expresiones, si no es que la única, con la que los alumnos identifican la noción de razón. Establecer la equivalencia entre estas distintas expresiones de la razón, un par de números naturales, un porcentaje, una fracción, es un paso importante en la comprensión de este concepto.

## Comparan fracciones

Un equipo convirtió todas las fracciones al denominador común 210 y así las compararon. El procedimiento es eficiente por su rapidez y precisión. Requiere, en primer lugar, comprender que las fracciones pueden dar cuenta del nivel de desempeño de las escuelas, es decir, que pueden expresar razones, y, en segundo lugar, dominar la técnica de comparación de fracciones. Esta secuencia de situaciones tiene el propósito de ayudar a que adquieran el primero de estos conocimientos.

## Actividad 2.17

### ¿Qué y cómo institucionalizar al término de la clase?

En las actividades de comparar las escuelas y de ubicar a la escuela E, los alumnos generaron varios procedimientos correctos, y también dejaron ver reflexiones y dudas. ¿Qué aspectos retomaría usted en una puesta en común? En particular, ¿qué procedimientos habría hecho públicos?, ¿qué preguntas habría planteado?, ¿qué informaciones habría dado? **SOLUCIONARIO**

### *Dar las fracciones, una buena ayuda para usarlas, pero no suficiente*

La experiencia anterior deja ver un hecho importante: proporcionar las fracciones explícitamente, no elimina la dificultad de usarlas para expresar y comparar razones. Deja ver también algunos recursos que pueden ayudar, en particular, la comparación de razones contra «la mitad» y la ubicación de razones en la recta numérica, entre las fracciones clave, medios y cuartos. El aprovechamiento de estos recursos requirió a la docente rescatar ideas de los procedimientos de los alumnos que podían ser útiles para todos, o proponer ella misma ciertas ideas, por ejemplo, expresar todas las razones «*número de aprobados respecto del número total*», con fracciones.

Es interesante también la aparición del porcentaje. Los alumnos suelen proponer este recurso en situaciones de comparación de razones. Como se señaló anteriormente, el porcentaje es una de las expresiones más reconocidas de la noción de razón. Usar porcentajes y ver su equivalencia con las otras maneras de expresar las razones, ya sea mediante dos

números, mediante fracciones, ayuda a avanzar en la comprensión de la razón, de la fracción y del porcentaje.

Entre los contextos que aquí se presentaron para el estudio de las razones como fracciones, hay diferencias; elegir la mejor regla de cambio, o la rana que da saltos más grandes, son situaciones que permiten validar empíricamente los resultados, mientras que en el contexto de escoger al jugador o a la escuela con mejor desempeño, este tipo de validación no es posible: ¿cómo saber si es correcto o no lo que pienso acerca de quién es el jugador más hábil, o de cuál es la escuela que mejor prepara a sus alumnos? Esta característica dificulta el proceso de hacer evidentes los errores, pero, por otra parte, hace más necesario desarrollar argumentos para convencer.

---

### **Actividad 2.18**

#### **Diseñar una situación**

Diseñe a grandes rasgos otra situación que favorezca la expresión de razones con fracciones. Analícela con algún compañero. Vean en qué medida podrían superar las limitaciones que se vieron en las situaciones anteriores.

---



## Capítulo 3.

# Fracciones y decimales como operadores multiplicativos

*Elodie: ¿Se dice, por ejemplo,  $\frac{3}{4}$  de 12 o  $\frac{3}{4}$  por 12?  
Para mí no es lógico porque  $\frac{3}{4}$  de 12 es una especie  
de resta de 12, pero  $\frac{3}{4}$  por 12 es una multiplicación.<sup>39</sup>*

### Introducción ¿Qué significa multiplicar por $\frac{3}{4}$ ?

#### Actividad inicial

El estudio de la primera parte de este capítulo le servirá para ampliar las respuestas que pudiera dar ahora a las siguientes preguntas; por esta razón solo en el primer planteamiento se remite al solucionario.

- ¿A qué se refiere Elodie, en el epígrafe, cuando dice que  $\frac{3}{4}$  de 12 «es una especie de resta de 12»? **SOLUCIONARIO**
- La multiplicación en los números naturales se puede interpretar como una suma en la que se repite un sumando, y tiene ciertas propiedades, por ejemplo, el producto siempre es mayor o igual que los factores, es decir, casi siempre «agrandar». En los números racionales, ¿la multiplicación también tiene esas propiedades?; por ejemplo, ¿multiplicar  $\frac{1}{2}$  por  $\frac{3}{4}$  se puede pensar como suma?, ¿agrandar?  
¿Qué puede significar  $\frac{3}{4}$  veces una cantidad o 0.75 veces una cantidad?

- ¿Qué justifica que la multiplicación por fracciones se llame «multiplicación» si ya no repite cantidades, y tampoco las agranda siempre?

En el proceso de aprender, los alumnos enfrentan una ruptura de significados entre la multiplicación de números naturales y la multiplicación de fracciones y decimales, porque ahora esta última:

- ... deja de ser una operación que agranda todas las veces,
- ... ya no puede calcularse siempre por medio de una suma repetida,
- ... pone en juego nuevas propiedades.

La explicación de por qué, pese a estas diferencias, una acción como la de tomar una fracción de una cantidad, se llama «multiplicar», no es sencilla. La idea misma de lo que significa «multiplicar» cambia. Comprender esto requiere de un trabajo prolongado, durante varios años, sobre todo en el nivel de secundaria.

Por otra parte, la noción de multiplicación por fracciones y decimales subyace a varias nociones importantes, relacionadas con la proporcionalidad, que se estudian en la primaria y sobre todo en la secundaria: las de razón, tasa, interés, escala, semejanza, porcentaje, probabilidad, entre otras. A la vez, estas nociones constituyen un terreno fértil para el estudio de la multiplicación.

Para acceder a la noción de multiplicación de números racionales se hará un abordaje simultáneo desde dos tipos de problemas multiplicativos: uno, sobre relaciones de proporcionalidad entre magnitudes, y el otro, sobre el cálculo de áreas de rectángulos.

G. Vergnaud (1988) fue de los primeros investigadores en distinguir dos tipos de problemas multiplicativos, aquellos en los que se relacionan dos conjuntos de medidas proporcionales, a los que también llama «de isomorfismo de medidas», y aquellos en los que se multiplican dos medidas de una magnitud, para dar lugar a una medida de una nueva magnitud, como en caso del área del rectángulo. A estos últimos los nombra problemas de «producto de medidas». El investigador muestra que con cada uno de estos tipos de problemas se construye un significado distinto de la noción de multiplicación, por lo que recomienda abordar los dos.

El nivel escolar en el que se estudia la multiplicación de fracciones y de decimales, y más ampliamente, de números racionales, suele ser el de la secundaria (de 7º a 9º grados), por lo cual las actividades que se estudiarán a continuación están dirigidas a ese nivel, salvo algunas excepciones de actividades que podrían aplicarse en primaria. Estas últimas están señaladas.

Los temas 1 y 3 se dedicarán a los dos tipos de problemas mencionados, y de cada uno se estudiarán dos variantes, por lo que se verán cuatro problemas en total (ver figura 20).

En el tema 2, se analizarán actividades para el estudio de la división de fracciones y decimales, tema que se puede estudiar a partir de 5º o 6º de primaria, y ampliarse en secundaria. Los problemas que se proponen para el estudio de esta operación son los del primer tipo (con magnitudes proporcionales, y específicamente, escala).

Igual que en los otros capítulos, se propone que el docente resuelva los problemas que se plantean y, enseguida, los analice desde el punto de vista de la enseñanza, para lo cual se hacen comentarios y preguntas específicas.

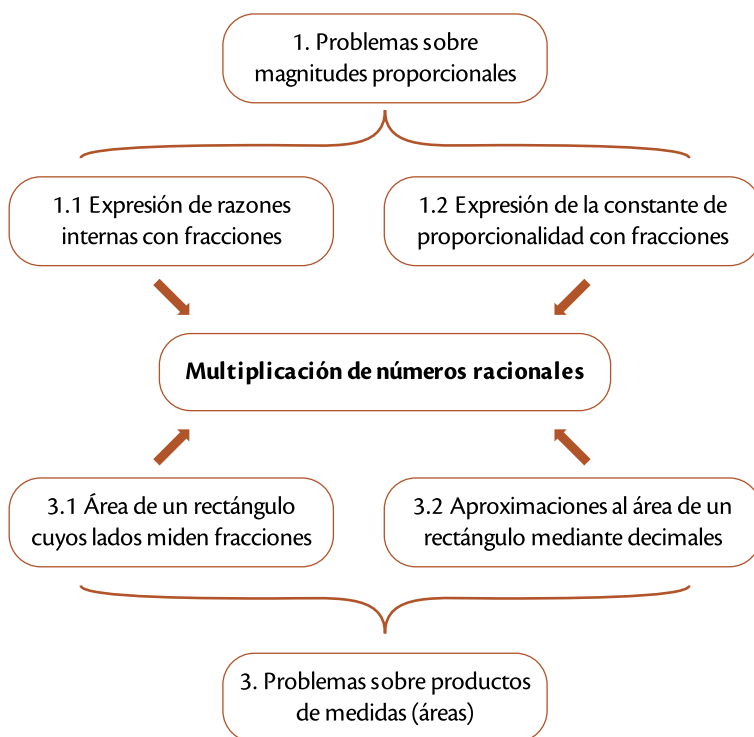


Figura 20. Tipos de problemas para acceder a la multiplicación de números racionales

## Tema 1. La multiplicación de fracciones en el contexto de la proporcionalidad

Las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes se caracterizan por dos propiedades fundamentales:

1. las razones entre dos valores de una de las magnitudes se conservan en la otra magnitud, por ejemplo, si en una figura determinada un lado mide el doble de otro, en todas las figuras a escala de esa figura, se mantiene la relación «doble» entre esos dos lados; a estas razones se les llama «internas»;



2. hay una razón *externa* constante, llamada «constante de proporcionalidad». Es un número, siempre el mismo, que multiplicado por cualquier valor de una magnitud, arroja el valor que le corresponde en la otra magnitud.

En el ejemplo de la figura 21, la razón interna de 6 con respecto a 3 entre dos lados de un triángulo (doble), se conserva en el otro triángulo, 30 con respecto a 15. La razón interna de 4 respecto a 3, también se conserva, 20 respecto a 15. Es decir, cada razón interna entre dos lados de un triángulo se conserva entre los dos lados correspondientes del otro triángulo, y es distinta a las razones que guardan los otros pares de lados. En cambio, las razones *externas* (15 respecto a 3; 30 respecto a 6 y 20 respecto a 4), son todas iguales: las medidas de un triángulo son 5 veces las del otro.

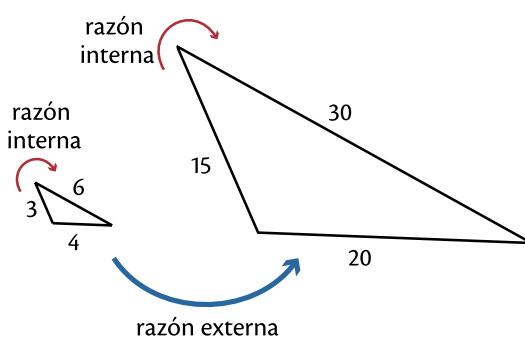


Figura 21. Dos propiedades fundamentales de la proporcionalidad. Representación gráfica

Las dos propiedades anteriores se suelen formular haciendo referencia a los operadores multiplicativos: se llaman *operadores escalares* a los que corresponden a las razones internas, y *operador función* al que corresponde a la razón externa. La primera propiedad se formula así: cuando dos magnitudes son proporcionales, el operador escalar entre cualquier par de valores de una de las magnitudes, es igual al operador escalar que hay entre los valores correspondientes de la otra magnitud. La segunda propiedad, se puede formular así: cuando dos magnitudes son proporcionales, el operador función es constante. Dicho operador se suele llamar también *constante de proporcionalidad* (ver figura 22).

		Razón externa constante, o constante de proporcionalidad	
		× 5	
	Figura A	Figura B	
	3	15	
× 2	6	30	× 2
× $\frac{2}{3}$	4	20	× $\frac{2}{3}$
Razones internas que se conservan			

Figura 22. Dos propiedades fundamentales de la proporcionalidad. Representación tabular.

Cuando las razones son fraccionarias se presenta una oportunidad para hacer explícito un hecho insólito: que «tomar una fracción de una cantidad» es multiplicar.

A continuación se estudian dos recorridos que se complementan para introducir la noción de multiplicación de fracciones, a partir de cada una de las propiedades mencionadas.

### 1.1 Las fracciones como razones internas

Aquí inicia un «camino corto» para introducir la multiplicación de fracciones.

## SECUNDARIA

### Actividad 3.1

#### Análisis de una lección de un libro de texto sobre la multiplicación de fracciones (parte I)

Resuelva las siguientes actividades tomadas de un libro de texto de primer grado de secundaria (ver figura 23) y conteste las preguntas que se plantean al final, las cuales le ayudarán en el análisis de la lección.

## Lección 9. Vueltas alrededor de un circuito I



### DESCUBRO MÁS

0.5 vueltas es lo mismo que  $\frac{5}{10}$  de vuelta o  $\frac{1}{2}$  vuelta. ¿Qué significa 0.25 vueltas?

1. Analiza la información y responde.

Un tren da vueltas en un circuito de 60 km.

a) ¿Cuántos kilómetros recorrerá después de media vuelta? \_\_\_\_\_

b) ¿Y después de 0.25 vueltas? \_\_\_\_\_

c) ¿Y después de  $2\frac{3}{4}$  vueltas? \_\_\_\_\_

d) Escribe los datos que faltan en la tabla.

Vueltas	0.25	$\frac{2}{5}$	0.5	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{3}{4}$	3	3.5	5	$5\frac{1}{4}$
Kilómetros recorridos				60							

e) Una manera de calcular los kilómetros recorridos en cinco vueltas es con la multiplicación  $5 \times 60$  km.

Explica, en tu cuaderno, con qué operación se calcula la distancia recorrida en  $\frac{2}{5}$  de vuelta.

Así como “cinco veces 60 km” corresponde a la multiplicación “ $60 \text{ km} \times 5$ ”, también “ $\frac{2}{5}$  de 60 km” corresponde a una multiplicación: “ $60 \text{ km} \times \frac{2}{5}$ ”. Es decir, obtener  $\frac{2}{5}$  de una cantidad es lo mismo que multiplicarla por  $\frac{2}{5}$ .

- En grupo, valida los datos que anotaste en la tabla. Comenten cómo debe ser el número de vueltas para que el total de kilómetros recorridos sea menor que 60.

2. Sin hacer cálculos escritos, subraya cada operación con el color que se indica.

■ Si el resultado es menor que 60.

■ Si el resultado es mayor que 60, pero menor que 120.

■ Si el resultado es mayor que 120.

a)  $60 \times \frac{2}{3}$

b)  $60 \times \frac{3}{4}$

c)  $60 \times \frac{2}{5}$

d)  $60 \times \frac{7}{3}$

e)  $60 \times 0.4$

f)  $60 \times 1.5$

g)  $60 \times 0.75$

h)  $60 \times 2.1$

i)  $60 \times 1\frac{1}{2}$

j)  $60 \times \frac{5}{2}$

k)  $60 \times 2\frac{1}{3}$

l)  $60 \times 2\frac{3}{4}$

Figura 23. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 3, Lección 9, Block, García y Balbuena, 2020, p. 32.

### Preguntas para el análisis de la lección

- a) En los incisos **1a**, **1b**, **1c** y **1d** de la lección no se espera que los alumnos apliquen el algoritmo para multiplicar fracciones, ni el de multiplicar decimales, puesto que se parte de que no los conocen aún. Entonces, si no conocen esos algoritmos, ¿cómo podrían resolver lo que se pregunta? **SOLUCIONARIO**
- b) Explique cómo podrían resolver los alumnos el inciso **2** de la lección, si todavía no conocen el algoritmo para multiplicar una medida (60 km) por un multiplicador fraccionario (inciso **a**, por ejemplo) o decimal (inciso **e**, por ejemplo). **SOLUCIONARIO**

### Dos características del problema del circuito

#### Multiplicadores variables

Al igual que en las situaciones de las naranjadas, que se presentaron en el capítulo anterior, en esta se plantea una relación de proporcionalidad, entre el número de vueltas que se dan a un circuito y la distancia total que se recorre. A diferencia de aquellas situaciones, en esta, la constante de proporcionalidad no es una fracción, sino es un número natural que corresponde a la medida del circuito (60 km por vuelta). Entonces, ¿cómo intervienen las fracciones? Intervienen al expresar los números de vueltas variables (media vuelta,  $\frac{3}{4}$  de vuelta, etc.) y, a veces también, las distancias recorridas (por ejemplo, a  $\frac{1}{40}$  de vuelta le corresponden 1.5 km).

Dicho en otros términos: los números de vueltas, enteros o fraccionarios son multiplicadores variables; el tamaño del circuito (60km) es el multiplicando y es la constante de proporcionalidad. También se puede decir que el valor unitario —«60 kilómetros por vuelta»— es constante.

### **La alternancia de multiplicadores enteros y fraccionarios: un facilitador hacia la idea de multiplicar por una fracción**

Una característica relevante de este contexto es la alternancia de multiplicadores enteros (5 vueltas, por ejemplo) y de multiplicadores fraccionarios ( $\frac{3}{4}$  de vuelta). Esta alternancia es la que justifica llamar «multiplicación» a la operación que se realiza en ambos casos: en el caso de multiplicadores enteros, la multiplicación es obvia; en el de multiplicadores fraccionarios, es novedosa. Esta alternancia fue sugerida como recurso didáctico por el investigador H. Freudenthal, desde los años ochenta del siglo pasado<sup>40</sup>.

## **SECUNDARIA**

### **Actividad 3.2**

#### **Análisis de una lección de un libro de texto sobre multiplicación de fracciones (parte II)**

Resuelva la segunda lección sobre el circuito (ver figuras 24 y 25) y después responda a las siguientes preguntas.

- ¿Qué se mantuvo y qué cambió en esta lección, en comparación con la anterior (la 9), con respecto al contexto (tren que da vueltas a un circuito) y a los datos numéricos? **SOLUCIONARIO**
- En el punto **1a**, en uno de los ejercicios, los alumnos deben calcular cuánto es  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{2}{5}$  de hectómetro, pero aún no saben multiplicar fracciones. ¿Cómo pueden resolver esta multiplicación? **SOLUCIONARIO**
- Explique con sus palabras, ¿cómo se justificó, en ambas lecciones, el llamar «multiplicación» a la operación de tomar una fracción de una cantidad?, ¿cómo se resolvieron las «multiplicaciones»?

## Lección 10. Vueltas alrededor de un circuito II

### MÁS IDEAS

Para dividir una fracción entre un número  $n$  se puede dividir su numerador entre  $n$ , o bien, multiplicar su denominador por  $n$ . Por ejemplo:

$$\frac{12}{15} \div 3 = \frac{12 \div 3}{15} = \frac{4}{15}.$$

O bien,

$$\frac{12}{15} \div 3 = \frac{12}{15 \times 3} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}.$$

**hectómetro:** unidad de longitud equivalente a 100 metros. Su abreviación es hm.

1. Analiza la información y responde.

Un tren de juguete viaja en un circuito de  $\frac{2}{5}$  de hectómetro.

- a) Indica, con fracciones de hectómetro, qué distancia recorre el tren cuando da...

- 10 vueltas: \_\_\_\_\_
- $\frac{1}{2}$  vuelta: \_\_\_\_\_
- $\frac{1}{4}$  vuelta: \_\_\_\_\_



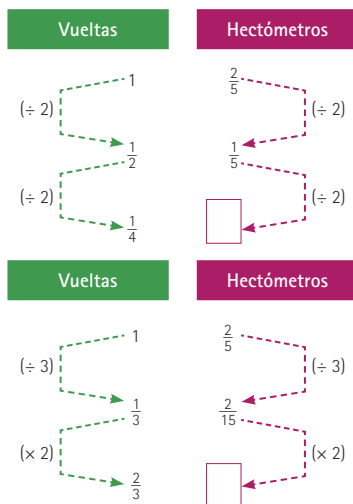
- b) El primer diagrama muestra una manera de calcular  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{2}{5}$ , que consiste en aplicar  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{1}{2}$ , es decir, dividir entre 2 dos veces.

Anota, en el diagrama, la fracción que falta junto a una de las flechas.

- c) El segundo diagrama muestra una manera de calcular  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{2}{5}$ : primero se calcula  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{2}{5}$ , dividiendo  $\frac{2}{5}$  entre 3, y después se multiplica por 2 (para obtener  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{2}{5}$ ).

Escribe la fracción que falta en el segundo diagrama.

- d) Si el tren completa 4  $\frac{2}{3}$  vueltas, ¿cuántos hectómetros recorre? \_\_\_\_



- Compara tus respuestas con las del resto del grupo. Observen que una manera de calcular  $\frac{2}{3}$  de una cantidad consiste en calcular primero  $\frac{1}{3}$  de esa cantidad y luego duplicar el resultado. Usen esa idea para calcular a qué fracción de hectómetro es igual  $\frac{2}{5}$  de  $\frac{2}{5}$  de hectómetro.

2. El circuito del tren ahora mide  $\frac{3}{4}$  hm.

- a) Anota los datos que faltan en la tabla.

Vueltas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	4	$5\frac{1}{3}$
Hectómetros recorridos					$\frac{3}{4}$					

Figura 24. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 3, Lección 10 (Parte I), Block, García y Balbuena, 2020, p. 34.

Número, álgebra y variación • Multiplicación y división

b) Completa los pasos para calcular  $\frac{4}{7}$  de  $\frac{2}{5}$  km.

Paso 1	Paso 2
Calcular $\frac{1}{7}$ de $\frac{2}{5}$ .	Multiplicar el resultado anterior por 4.
_____	_____

c) Lee la técnica que se describe a continuación y verifica que corresponda a la que completaste en el inciso anterior.

Para calcular el resultado de una fracción de fracción, basta multiplicar entre sí tanto los numeradores como los denominadores; por ejemplo:

$$\frac{4}{7} \text{ de } \frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{7 \times 5} = \frac{8}{35}$$



Analiza con el grupo por qué se le llama “multiplicar” a la operación que consiste en obtener  $\frac{2}{3}$  de  $\frac{3}{4}$ . Después, comenten la siguiente información.

El número total de kilómetros que recorre el tren al dar  $n$  vueltas a un circuito que mide  $m$  kilómetros es  $n$  veces  $m$  kilómetros, es decir,  $n \times m$  kilómetros, independientemente de si  $n$  y  $m$  son números naturales o fracciones.

Si da 5 vueltas de 60 km, el total de kilómetros es  $60 \times 5 = 300$  km.

Si da  $\frac{2}{3}$  de vuelta de  $\frac{3}{4}$  hm, el total es  $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$  hm.

Es decir, obtener una fracción de otra fracción también es multiplicar.

### DESCUBRO MÁS

¿Qué resultado se obtiene si se multiplican dos fracciones de las formas  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$ , es decir, en las que el denominador de una de ellas es el numerador de la otra y viceversa (por ejemplo,  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$  o  $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$ )?



3. Resuelve y simplifica.

a)  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} =$  \_\_\_\_\_

b)  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} =$  \_\_\_\_\_

c)  $\frac{3}{10} \times \frac{1}{3} =$  \_\_\_\_\_

d)  $\frac{5}{12} \times \frac{2}{5} =$  \_\_\_\_\_

e)  $\frac{1}{10} \times \frac{1}{2} =$  \_\_\_\_\_

f)  $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} =$  \_\_\_\_\_

g)  $\frac{3}{10} \times \frac{10}{3} =$  \_\_\_\_\_

h)  $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} =$  \_\_\_\_\_

i)  $\frac{5}{13} \times \frac{13}{5} =$  \_\_\_\_\_



Con ayuda del profesor, compara tus resultados con los del grupo. Resuelvan las siguientes multiplicaciones de fracciones mixtas.

a)  $2\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} =$  \_\_\_\_\_

b)  $5\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{6} =$  \_\_\_\_\_

c)  $3\frac{1}{5} \times 4\frac{1}{3} =$  \_\_\_\_\_

d)  $2\frac{4}{7} \times 1\frac{1}{2} =$  \_\_\_\_\_

Figura 25. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 3, Lección 10 (Parte II), Block, García y Balbuena, 2020, p. 35.

### Actividad 3.3

#### ¿Y la conmutatividad?

¿Qué diferencias y que tienen de común las siguientes multiplicaciones?

- 5 bolsas de  $\frac{3}{4}$  de kilogramo
- $\frac{3}{4}$  de bolsa de 5 kilogramos

¿Cómo podría un alumno hallar el total en cada caso?

*Cuando el multiplicador es un número natural*  
(«5 veces  $\frac{3}{4}$  de kg») **PRIMARIA Y SECUNDARIA**

Si bien en el nivel de los números ambas operaciones, «5 por  $\frac{3}{4}$ » y « $\frac{3}{4}$  por 5», dan el mismo resultado (la multiplicación de fracciones es conmutativa), cuando se trabaja con números concretos, —esto es, referidos a magnitudes—, las multiplicaciones *no* representan lo mismo.

En «5 por  $\frac{3}{4}$  de una unidad U», el multiplicador, 5, es un número natural, por lo tanto, la multiplicación se puede interpretar como una suma repetida, al igual que en los números naturales.

La cantidad que se repite 5 veces es  $\frac{3}{4}$  de unidad.

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Este caso particular de la multiplicación no presenta mayor dificultad conceptual que la de una suma de fracciones con el mismo denominador. Por ello, esta operación, así como los problemas que la implican, pueden plantearse desde que se estudia la suma. Incluso, se puede inferir un algoritmo para este caso particular de multiplicación: «se multiplica el multi-



plicador (el número de veces) por el numerador de la medida fraccionaria».

$$n \times \frac{a}{b} \text{ de unidad} = \frac{na}{b} \text{ de unidad}$$

En cambio,  $\frac{3}{4}$  «veces» 5 kg, interpretado como « $\frac{3}{4}$  de 5 kg» implica, por ejemplo, considerar que  $\frac{3}{4}$  es  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ , y que entonces  $\frac{3}{4}$  de 5 es la mitad de 5 (esto es  $2\frac{1}{2}$ ) más la mitad de la mitad de 5 (esto es,  $1\frac{1}{4}$ ), lo que en total da  $3\frac{3}{4}$ , o bien, de otra manera, dividir 5 kg entre 4 para obtener  $\frac{1}{4}$  de la cantidad, y luego multiplicar lo que salga por 3. Pero ver esas acciones como una multiplicación requiere, además, una reconceptualización de la noción de multiplicación.

## 1.2 Las fracciones como constantes de proporcionalidad

A continuación, inicia el segundo recorrido para aproximarse a la noción de multiplicación, ahora en tanto constante de proporcionalidad.

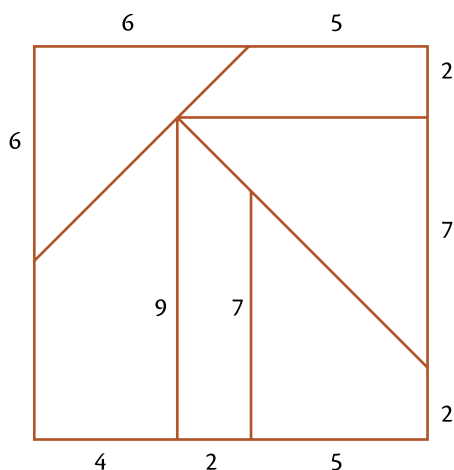
### PRIMARIA Y SECUNDARIA

#### Actividad 3.4 El rompecabezas

La situación que se revisará a continuación, «El rompecabezas», forma parte de una secuencia de situaciones didácticas desarrollada por Guy Brousseau —investigador francés, fundador de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)— para propiciar una génesis escolar de la multiplicación por decimales. En este apartado no se estudiará la secuencia completa, pues es larga, compleja y muy distante de los caminos usuales<sup>41</sup>. No obstante, la situación «El rompecabezas» tiene interés por sí misma y puede integrarse en una secuencia distinta a la que diseñó Brousseau. Es lo que se hará aquí.

Para facilitar el análisis de esta situación se sugiere realizarla previamente, de preferencia con uno o más colegas.

Abajo aparece dibujado un rompecabezas. Trácelo en un papel, con las medidas que se indican (en centímetros), recorte las piezas y, si participan varios, repártanselas (lo ideal es que cada pieza se elabore por una persona distinta). Se trata de hacer una copia a escala del rompecabezas, en la que el lado que mide 4 cm, en la copia a escala mida 7 cm. Cada uno debe averiguar las medidas de la pieza que eligió o que se le asignó, trazarla y recortarla. Al final, se juntan las piezas ampliadas y se verifica que encajen tal como en el rompecabezas original.



Conteste las siguientes preguntas.

- Al armar el rompecabezas ampliado, ¿las piezas embonaron? Si no fue así, ¿a qué se debió?
- Observe que la fracción que juega como constante de proporcionalidad no se da, está implícita en la razón «a 4 le corresponde 7». ¿Cómo piensa que resolverían el problema alumnos de sexto grado de primaria o de primer grado de secundaria? ¿Qué dificultades tendrían? ¿Qué errores podrían aparecer?

### *Algunas características de la situación del rompecabezas*

La situación plantea un problema que implica poner en juego un multiplicador fraccionario para reproducir una figura. El multiplicador no se da ni siquiera como «fracción de», la única información que se brinda es que un lado de la pieza de la figura que mide 4 cm se transformó en uno de 7 cm, en un contexto de escala. Esto da lugar a un problema complejo en el que la primera dificultad es superar la estrategia aditiva que suelen usar los alumnos, y que consiste en sumar 3 cm a todos los lados de las piezas de la figura. Pese a esta dificultad, la consigna es sencilla, los alumnos pueden abordar el problema (aunque no necesariamente resolverlo) y recibir retroalimentación, ya que pueden ver si las piezas ampliadas embonan, o no. Estas características hacen de la situación una situación adidáctica.

#### **Actividad 3.5**

#### **Situación del rompecabezas, en un grupo de sexto grado de primaria<sup>42</sup>**

Lea el siguiente reporte y conteste las preguntas que se plantean después.

Se trata de dos aplicaciones de la situación anterior en un grupo de sexto grado. En la primera, los alumnos deben construir las piezas de un rompecabezas de manera que «el lado que mide 4 cm en el original, mida 7 cm en la reproducción». En una segunda aplicación, el lado que mide 5 cm en el original debe medir 8 cm en la reproducción. Se pide además que, en cada equipo, cada alumno haga una o dos piezas y luego reúnan todas las del equipo para verificar si se forma el rompecabezas.

El propósito de la situación es, en primer lugar, poner en evidencia que la estrategia aditiva (sumar 3) no funciona: al aplicarla, los alumnos obtendrán piezas deformadas y observarán que no embonan. En

segundo lugar, se espera que los alumnos apliquen algún recurso que tenga en cuenta la relación proporcional entre las medidas de la figura original y las de la reproducción.

Es probable que recurran al procedimiento del «valor unitario», es decir, que calculen la medida que corresponde a una unidad y, a partir de este, las demás medidas. En cierto momento, se espera que la secuencia favorezca también la puesta en juego de la fracción en el papel de operador multiplicativo entre dos conjuntos de medidas.

Después de presentar la segunda experiencia, se plantean preguntas para orientar el análisis de esta.

#### PRIMERA EXPERIENCIA:

##### EL LADO QUE MIDE 4, EN LA REPRODUCCIÓN DEBE MEDIR 7

Desde que el maestro estaba dando la consigna, algunos alumnos hicieron anticipaciones:

*Maestro: (...) queremos que el lado que mide 4 en este rompecabezas, mida...*

*Alumno: ocho en el otro...*

El alumno expresa saber que, en el agrandamiento, está en juego la multiplicación, y aplica el agrandamiento más simple ( $\times 2$ ). Otro alumno expresó:

*Maestro: (...) queremos que el lado que mide 4 cm en este rompecabezas, mida 7cm en el otro.*

*Alumno: y el lado que mide 5 cm, mida 8 cm, el que mida 6 cm, mida 9 cm...*

Al estar implicada una multiplicación desconocida (por un número no entero), el alumno se apoya en un recurso aditivo.

En el grupo se desarrollaron seis procedimientos, dos incorrectos y cuatro correctos.

## Procedimientos incorrectos

*Procedimiento aditivo: sumar la constante 3.*

Por lo menos en tres equipos utilizaron este procedimiento y comprobaron que las piezas se deforman.

Llama la atención la reflexión de Audiel, quien propuso que un lado del nuevo cuadrado midiera 20, lo cual obtuvo al sumar 3 a cada una de las medidas dadas de un lado,  $(2 + 3) + (7 + 3) + (2 + 3)$ , pero enseguida, expresó con cierta duda: «*Quién sabe, porque al más grande le debe tocar más, como la mitad de su valor*». Así, antes de llevar a cabo su estrategia de sumar tres, la puso en duda, al parecer porque incrementa la misma cantidad absoluta a todas las medidas, en lugar de incrementar cantidades proporcionales a las medidas.

Por su parte, Arsenio también descubrió que la misma estrategia aditiva, sumar 3, no funciona porque arroja la medida 20 cm para el lado del cuadrado formado por 2 cm, 7 cm y 2 cm, mientras que arroja 17 para el lado formado por 5 cm y 6 cm. Este es un ejemplo del que se habló antes, de la deformación de la figura.

*La regla de correspondencia  $2x - 1$ .*

Por lo menos en dos equipos descubrieron que dos veces el 4, menos 1 da 7 y aplicaron esa regla a las demás medidas, por ejemplo, a 5 cm le corresponderían 9 cm. Al tratar de armar el rompecabezas, en uno de los equipos identificaron que algo no funcionaba. En la confrontación se presentaron tres intentos de explicar el motivo por el que no puede ser correcto el procedimiento.

Audiel, retomando su intuición acerca de la necesidad de que los incrementos que se dan a las diferentes medidas dependan de su tamaño —y que por lo tanto, el incremento no sea constante, pero sí la razón de cada incremento respecto de cada medida—, expresó:

*Audiel: Está mal porque no siempre de todo es...el doble menos uno, no puede ser porque al grande le toca de más y al más chico le toca menos.*

Rodrigo logró darse cuenta de que al aplicar la regla  $2x - 1$ , se obtienen dos medidas diferentes para el lado del cuadrado, dependiendo del

lado que se escoja, lo cual constituye una prueba de que la estrategia es incorrecta.

A 2 cm le corresponden 3 cm, porque  $2 \times 2 - 1 = 3$

A 7 cm le corresponden 13 cm, puesto que  $7 \times 2 - 1 = 13$

Por lo tanto al lado de 11 cm formado por los tramos de 2 cm, 7 cm, y 2 cm, le corresponde un lado formado por los tramos de 3 cm, 13 cm y 3 cm, esto es, 19 cm en total. Mientras que al lado de 11 cm formado por los tramos de 5 cm y 6 cm, le corresponde un lado formado por 9 cm y 11 cm, es decir, 20 cm en total.

Rodrigo logró mostrar que un lado es de 19 y el otro es de 20, con lo cual dejó claro que lo que se formó ya no es un cuadrado.

Cabe notar que los razonamientos más explícitos e interesantes provienen de los intentos de algunos alumnos por mostrar que las estrategias de sus compañeros son incorrectas y no funcionan.

Es importante notar también la ventaja de que el cuadrado tenga lados subdivididos de diferentes maneras (uno como  $2 + 7 + 2$  y el otro como  $5 + 6$ ), pues esto permite evidenciar que las estrategias aditivas no funcionan.

### **Procedimientos correctos**

Un hecho poco frecuente es que en esta primera experiencia no apareció el procedimiento del valor unitario, sino hasta la segunda. Se desarrollaron, en cambio, varios procedimientos que establecen el operador multiplicativo de distintas maneras: en un caso consideraron lo que hay que incrementar a cada medida, respetando que los incrementos deben ser proporcionales a las medidas, y en otro, establecieron la composición de operadores ( $\div 4$ ) y ( $\times 7$ ) que permite generar las medidas de la reproducción a escala.

#### *Procedimientos centrados en el incremento proporcional*

En el grupo lograron establecer dos procedimientos para que los incrementos fueran proporcionales a las medidas. Uno de ellos, el equipo de Audiel, consistió en aumentar «tres centímetros por cada cuatro»: después de invalidar la estrategia  $+ 3$ , y con la hipótesis de que «al grande le toca más», anotaron lo siguiente en el pizarrón,

con la ayuda del maestro pues la explicación del equipo no resultaba suficientemente clara.

*4 + 3 (el incremento de 4 es 3)*

*2 + 1.5 (2 es la mitad de 4, entonces le corresponde un incremento de la mitad de 3)*

*5 + 3.75 (posiblemente porque a 1 le corresponde un incremento de la mitad que a 2, es decir de 0.75, entonces a 5 —que es 4 + 1— le corresponde un incremento de 3 + 0.75)*

El segundo procedimiento, consistió en aplicar la transformación «cada medida aumenta  $\frac{3}{4}$  de sí misma»: Irma, explicó que a 4 se le aumentaron 3 y 3 equivale a  $\frac{3}{4}$ . La observación es muy buena, pero la formulación de la estrategia estaba aún inconclusa. Entonces, Netzaí, integrante de otro equipo, terminó de explicar.

*Netzaí: Para llegar de 4 a 7 son 3, y el 3 de 4 equivalen a  $\frac{3}{4}$*

*Maestro: ¡Ah!, 3 es  $\frac{3}{4}$  de 4...*

*Netzaí: Entonces a todas las medidas les sumas  $\frac{3}{4}$  de las mismas.*

Calcularon cuánto corresponde a 6 (6 más  $\frac{3}{4}$  de 6) así:  $6 \div 4 = 1.5$  y  $1.5 + 1.5 + 1.5 = 4.5$ , luego  $4.5 + 6 = 10.5$ .

No se sabe cómo encontraron que 3 es  $\frac{3}{4}$  de 4. Estos alumnos lograron expresar la razón (el incremento con respecto a la medida original) con una fracción, misma que utilizaron como operador para obtener las demás medidas.

*Procedimiento centrado en la composición de operadores «entre 4» seguido de «por 7».*

En el equipo de Rodrigo, Esteban, Minerva y Karla, obtuvieron las medidas dividiendo cada una entre 4 y multiplicando por 7.

Así, para calcular la imagen de 5 hacen:

$$\begin{array}{ccc} \div 4 & & \times 7 \\ 5 & 1.25 & 8.75 \end{array}$$

En la confrontación, Rodrigo dijo: «*Lo que hicimos fue todas las medidas entre 4 y por 7, en lugar de sacar primero el entero*». No supimos a qué se refería con «*en lugar de sacar primero el entero*». La alumna Irma les preguntó que de dónde salió el 7, a lo que Rodrigo respondió, sin explicar realmente: «*Porque 4 entre 4 da uno y por siete da siete*». Quizá ellos mismos no sabían bien por qué funcionaba su estrategia. Encontraron la composición de transformaciones multiplicativas que permiten pasar de 4 a 7, pero ¿qué significa para ellos?

Uno de los significados posibles, que se explicita en la sesión siguiente, es el de hacer primero, hipotéticamente, una reducción en la que lo que mide 4 en el original, medirá 1 en la reducción, y después una ampliación en la que lo que mide 1 medirá 7:

$$\begin{array}{ccc} \div 4 & & \times 7 \\ 4 & 1 & 7 \end{array}$$

Enseguida, Irma preguntó a los autores de este procedimiento: «*Si nos hubiesen dicho que el 6 tenía que ser 10.5, ¿cómo le hubieran hecho?*»

Rodrigo respondió bien el cuestionamiento: «*lo mismo, todo lo dividimos entre 6, y después lo multiplicamos por la medida (es decir, por 10.5)*». En la segunda experiencia, que presentaremos, se observará cómo se sigue desarrollando esta idea.

En esta primera sesión se logró poner en evidencia el carácter fallido de dos estrategias incorrectas, entre las que se encuentra la aditiva, y se difundieron varias estrategias correctas.

## SEGUNDA EXPERIENCIA:

### EL LADO QUE MIDE 5, DEBE MEDIR 8 EN LA REPRODUCCIÓN

El maestro dibujó en el pizarrón el rompecabezas original en color rojo y el «ampliado» en azul (representaciones sin las medidas exactas). Pidió a los alumnos que recordaran las medidas del original y les explicó que en el nuevo rompecabezas lo que mide 5 en el original debe medir 8. Explicó que esta vez primero calcularían las medidas, después se compararían las medidas obtenidas por cada equipo, y al final construirían el rompecabezas.



Además de los procedimientos correctos de la vez pasada, aparecieron dos más, el del valor unitario, y el que puso en juego el operador función « $\frac{8}{5}$  de». Asimismo, se lograron explicitar mejor los razonamientos subyacentes. El error aditivo volvió a aparecer, al menos en un equipo.

Cuando los alumnos terminaron de calcular las medidas, el maestro escribió en el pizarrón las respuestas de todos los equipos y organizó la discusión.

A continuación, se mostrarán algunos ejemplos de los procedimientos correctos y de las explicaciones de los alumnos en torno a ellos.

*El valor unitario (imagen de un centímetro)*

Varios equipos usaron este procedimiento. Myriam, Moira y Karla, después de señalar que el incremento esta vez sería 3 por cada 5, lo que hicieron fue obtener el «valor unitario», 1.6, y multiplicar todas las medidas por ese valor. El maestro generó las condiciones para una mejor explicación de su procedimiento:

*Maestro: ¿Y qué significa el valor unitario?*

*Moira: Que cada centímetro vale 1.6.*

*Maestro: ¿A qué centímetro te estás refiriendo?*

*Moira: A las medidas.*

*Arsenio: Un centímetro del original vale 1.6 centímetros en el rompecabezas que se va a reproducir.*

*Moira: Así es más fácil.*

*La composición de operadores ( $\div 5$ ) ( $\times 8$ ) (o pasar por la figura intermedia en la que a 5 le corresponde 1).*

Esteban usó este procedimiento la vez pasada pero no logró fundamentarlo. En esta ocasión explicó que ellos dividieron 5 entre 5 y lo multiplicaron por ocho. Agregó que hicieron esto mismo con todas las medidas. Al pedirle una explicación mostró dificultad, pero finalmente lo logró:

*Esteban: Es que es como la escala (...), queremos pasar por uno (dibuja un cuadrado pequeño, luego uno grande) (...) necesitamos la escala de uno para luego pasar a la que quieras.*

Logró explicitar el razonamiento que está detrás de la composición ( $\div 5$ ) ( $\times 8$ ). El operador ( $\div 5$ ) permite hacer una reproducción en la que a 5 le corresponde 1. Luego, ( $\times 8$ ) permite pasar de esa a otra en la que a 1 le corresponde 8.

*Augusto (explica): Todo se divide entre 5 y el resultado es un quinto, y luego por 8.*

Ante las preguntas del maestro, Augusto y Rodrigo dieron un ejemplo, calcularon la imagen de 2, que es 0.4, y explicaron:

*Augusto: El dos se tiene que dividir entre 5 porque así sacaríamos un quinto.*

*Rodrigo L. (le cuesta trabajo explicar el porqué de su procedimiento, finalmente logra una explicación en la que destaca dos transformaciones): (...) para que nos saliera un quinto de la medida original, después la multiplicamos por ocho para que nos saliera la medida reproducida.*

Notemos que, aunque las operaciones que se hacen aquí y las que se hacen en el procedimiento del «valor unitario» son casi las mismas (dividir entre 5, multiplicar por 8), las ideas que subyacen son muy distintas.

- La estrategia del «valor de uno» se basa en ver qué imagen corresponde, en la reproducción, a un centímetro de la figura original ( $8 \text{ cm} \div 5 = 1.6 \text{ cm}$ ). Ese valor, 1.6 cm, será multiplicado por diferentes números, por ejemplo, para ver cuánto corresponde a un lado de 4 cm, se hace la multiplicación 4 veces 1.6 cm.
- La estrategia de la composición se basa en la idea de formar otra figura a escala, en la que a 5 le corresponde 1, para, posteriormente,

pasar de esa a la figura en la que a 1 le corresponde 8. Cada medida será dividida entre 5 y multiplicada por 8. El paso siguiente, que los alumnos ya no dan, es el de sintetizar la composición de esos dos operadores en uno solo:  $\times \frac{8}{5}$  o  $\times 1.6$ .

*El operador « $\frac{8}{5}$  de»*

Arsenio explicó que de 5 a 8 hay 3 y que, por lo tanto, el aumento es de  $\frac{3}{5}$  de 5. Dice también que 8 es  $\frac{8}{5}$  de 5. Para el cálculo de la medida que corresponde a 2, explicó:

*Arsenio: Lo que queremos sacar son  $\frac{8}{5}$ . 0.4 es un quinto [de 2] y eso se multiplica por 8 (para obtener la imagen de 2).*

*Maestro: ¿Tú crees que eso se hizo para pasar de 5 a 8?*

*Arsenio: Sería entre 5, 5 entre 5 es 1, 1 por 8 es 8, son ocho quintos de 5. Aunque lo que yo hice es parecido, la diferencia entre el 2 y el otro número (se refiere a la medida que corresponde a 2) es  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{3}{5}$  de 2 es 1.2 (o sea,  $2 + \frac{3}{5}$  de 2 =  $2 + 1.2 = 3.2$ )*

Arsenio tiene claro que el operador en juego es « $\frac{8}{5}$  de», y que este consiste en dividir entre 5 y multiplicar por 8. De esta manera, Arsenio establece con claridad los dos operadores posibles, el que da el incremento y el que da directamente el valor correspondiente. Estos se pueden expresar algebraicamente así<sup>43</sup>:

$$y = x + \frac{3}{5}x \quad \text{y también} \quad y = \frac{8}{5}x$$

### ¿POR CUÁNTO MULTIPLICAR LA MEDIDA ORIGINAL...?

Al final, el maestro planteó esta pregunta: «¿En total, podrían decir por cuánto hay que multiplicar la medida original para obtener la medida de la copia?»

*Rodrigo: No la multiplicamos luego luego, primero la dividimos, ¡ah!, ¡ya sé que quieres decir!*

*Maestro: Ya sé, primero dividimos, después multiplicamos, pero ¿podrían decir en total por cuánto multiplicamos al original?*

(silencio)

Rodrigo: No...Nada más por uno, por uno y fracción.

(silencio)

Observador: (por ahí se escucha «por 1.6»)

Maestro: Sí, por 1.6, es lo que encontraron en uno de los procedimientos, pero ustedes dicen que se divide entre 5 y se multiplica por 8, ¿se podría decir por cuánto se multiplica?

Alumno: No...

Maestro: Bueno, piénsese.

Llama mucho la atención de que quienes usaron la estrategia de multiplicar por 1.6 hayan tardado tanto en contestar, y solo uno de ellos lo hizo.

Arsenio, quien supo que las medidas de la reproducción son  $\frac{8}{5}$  de las de la original, no pudo contestar tampoco.

## PREGUNTAS

Para contestar, consideren las dos experiencias sobre el rompecabezas que se presentaron anteriormente.

- Describan al menos tres procedimientos que permiten resolver correctamente la situación del rompecabezas. ¿Cuál es el procedimiento que se busca propiciar en esta secuencia? **SOLUCIONARIO**
- En ambas experiencias, los alumnos logran varias expresiones del operador multiplicativo en juego, por ejemplo, «incrementar 3 de cada 5». Identifiquen algunas más. **SOLUCIONARIO**
- Multiplicar una medida  $M$  por un número natural  $n$  puede interpretarse como sumar  $n$  veces  $M$ . ¿Cómo puede interpretarse la multiplicación de una medida  $M$  por una fracción  $\frac{a}{b}$ ? **SOLUCIONARIO**
- Identifiquen algunos de los errores que cometen los alumnos en el desarrollo de la experiencia y señale cómo se dan cuenta de que hay error, o si no se dan cuenta. **SOLUCIONARIO**
- En la experiencia anterior, aun cuando un alumno logra descubrir la pertinencia del operador « $\frac{8}{5}$  de», no logra responder a la pre-

gunta final del maestro: ¿por qué número hay que multiplicar...?

¿A qué puede deberse? **SOLUCIONARIO**

- f) ¿Por qué usar un rompecabezas y no una figura más simple, por ejemplo, una sola pieza con forma rectangular? **SOLUCIONARIO**

### *Hacia una nueva definición, más amplia, de multiplicar*

En la experiencia anterior, es claro que sacar « $\frac{8}{5}$  de algo» no es todavía lo mismo que multiplicar por  $\frac{8}{5}$ . Con dificultad los alumnos aceptan que se puede multiplicar por 1.6. Sin embargo, aparecen sospechas de que podría haber un factor fracción: «*nada más por uno, por uno y fracción*».

En el nivel de secundaria, el profesor podría intervenir y explicar a los alumnos que se trata de una multiplicación, haciendo una comparación con lo que ocurre cuando el operador es un número natural, por ejemplo: cuando un lado de 5 cm se transforma en uno de 10 cm, interviene una multiplicación (por dos); también cuando un lado de 5 cm se transforma en uno de 8 cm, interviene una multiplicación y esta es  $\times \frac{8}{5}$ , o también  $\times 1\frac{3}{5}$ . Es decir, « $\frac{8}{5}$  de» es una multiplicación.

De nuevo, se está frente a una redefinición de la multiplicación que los alumnos comprenderán poco a poco.

### *Una definición antigua, y amplia de multiplicación*

#### **PROFUNDIZACIÓN**

En lugar de definir la multiplicación como suma repetida, por ejemplo, de  $2 \times 5$  como  $5 + 5$ , en esta experiencia se define —de manera implícita— como una proporción:

$2 \times 5$  es el número que es a 5 como 2 es a 1.

El interés de esta definición de la multiplicación es que, a diferencia de la de suma repetida, funciona bien tanto para multiplicación de números naturales como para la de números racionales:  $\frac{8}{5} \times 5$  es el número que es a 5 como  $\frac{8}{5}$  es a 1.

$$\begin{array}{rcl} & \times 2 & \\ 1 & \rightarrow & 2 \\ 5 & \rightarrow & 2 \times 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & \times \frac{8}{5} & \\ 1 & \rightarrow & \frac{8}{5} \\ 5 & \rightarrow & \frac{8}{5} \times 5 \end{array}$$

Nótese que, con esta definición de multiplicación, ante la pregunta «¿Qué es  $\frac{8}{5} \times 5$ ?», podemos contestar ahora: es el número en el que se transforma el 5 (la imagen de 5), en una relación de proporcionalidad en la que 1 se transforma en  $\frac{8}{5}$ . Lo mismo se puede decir de « $2 \times 5$ »: es el número en el que se transforma 5, en una relación en la que 1 se transforma en 2. Cabe señalar que se trata de una definición muy antigua de la multiplicación<sup>44</sup>.

Esta nota sobre la definición de la multiplicación que subyace es solamente para conocimiento del docente, no sería conveniente darla a los alumnos pues ellos no tienen aún elementos para comprenderla, y no la necesitan.

### *Institucionalizar*

El trabajo de informar a los alumnos que la transformación  $\frac{8}{5}$  de es una multiplicación, le corresponde al maestro. Como se vio en la segunda experiencia sobre el rompecabezas, algunos alumnos pueden establecer que la transformación que asocia 8 a 5 es  $\frac{8}{5}$  de, pero ignoran que esa transformación es una multiplicación, como lo es la que asocia 5 a 10.

Esta etapa de identificar y nombrar determinados conocimientos, corresponde a lo que se llama, en la Teoría de

las Situaciones Didácticas, un trabajo de institucionalizar. Mediante la institucionalización el profesor ayuda a hacer explícitas nociones que están implícitas, las nombra, las vincula con otras. Dice G. Brousseau sobre este proceso:

*Escoger ciertas preguntas entre las que ya se saben resolver, ubicarlas en el corazón de una problemática que confiere a las respuestas un estatuto de saber más o menos importante, vincularlas a otras preguntas, a otros saberes, constituye a final de cuentas lo esencial de la actividad científica. Este trabajo cultural e histórico difiere totalmente del que podría dejarse a cargo del alumno, le corresponde al maestro; no es el resultado de una adaptación del alumno (Brousseau, 1998, p. 77).*

Cabe destacar la importancia de incorporar este momento en la clase cuando ya los alumnos han resuelto algunas tareas, y no al principio (suele suceder que se inician las clases con una definición, seguida de ejemplos y, al final, se plantean ejercicios de aplicación), porque si se hace al principio se cancela la posibilidad de que los alumnos identifiquen la necesidad del conocimiento en cuestión, y se aproximen por sí mismos a este.

---

### Actividad 3.6

#### Reflexión sobre la institucionalización en clase

Trate de recordar algunos ejemplos de cómo usted ha conducido momentos de institucionalización. Describa uno de esos momentos: ¿sobre qué conocimiento fue?, ¿en qué fase del proceso de enseñanza de ese conocimiento ocurrió, al iniciar, en varios momentos a lo largo del proceso, al final?, ¿qué destacó?, ¿qué dificultades recuerda?, ¿cómo lo haría si se repitiera y quisiera mejorar? Si responde estas preguntas en un colectivo, en equipo o en taller, intercambie sus experiencias con sus compañeros.

## El carácter relativo de la validación empírica y el necesario trabajo de equilibración didáctica del profesor

### PROFUNDIZACIÓN.

En varias ocasiones en que se ha aplicado la situación del rompecabezas se observa que, cuando los alumnos emplean un procedimiento aditivo, el hecho de que las piezas no embonen no es suficiente para que ellos mismos cuestionen su procedimiento. Los alumnos tienden a pensar que midieron mal, o que recortaron mal, y corrigen eso, o ajustan (recortar un poquito por aquí, otro poquito por allá) para forzar a que las piezas embonen. Es frecuente que, en algún momento, se requiera de la ayuda del docente para que los alumnos consideren la posibilidad de que su procedimiento es lo que está mal.

En el análisis de una de esas experiencias, Sensevy (2011, pp. 335-341) muestra el caso de un profesor que se acerca a un grupo de alumnos que no logra reconocer que lo que está mal es su estrategia aditiva y sugiere, él mismo, hacer algo distinto a agregar 3, como puede verse en el siguiente extracto, en las intervenciones del profesor<sup>45</sup>:

1. *Profesor: 1,2,3, ¿sí se añadió 3 a todos?*
2. *Alumno(s): bueno, pues sí, está bien*
3. *Profesor: entonces, ¿qué ponemos en duda?*
4. *Alumno(s): Mmm..., es falso. Mmm...; esta pieza está bien!*
5. *Profesor: bueno, no lo es porque no forma el rompecabezas correcto*
6. *Alumno(s): y aquí eso no da 3*
7. *Profesor: ¿en dónde 3?*
8. *Alumno(s): aquí eso da 2*
9. *Profesor: Mmm... (inaudible) ¿3? ¿En dónde es 3 más?*



10. *Alumno(s): de cada lado*
11. *Profesor: si yo fuese ustedes reflexionaría sobre el método que utilicé, quizás eso es lo que no está bien*
12. *Alumno(s): sí*
13. *Profesor: quizás lo que pasa es que ....ustedes añadieron 3, ¿no?, no se equivocaron al recortar, ¿de acuerdo? ¿Todo el mundo recortó bien sobre las líneas?*
14. *Alumno(s): sí*
15. *Profesor: bueno, entonces tal vez no haga falta añadir 3, tal vez haya que hacer otra cosa*

Dice Sensevy:

*(...) lo que cuenta como una evidencia para el profesor (las piezas no coinciden), y que proporciona así una inferencia pertinente (la estrategia aditiva no es la buena), no constituye, de ninguna manera, un hecho para los alumnos (...)*

*En esta situación, los alumnos deben establecer una nueva relación con el milieu<sup>46</sup>, ellos deben de una cierta manera reconocerlo por lo que es. Para eso, deben establecer una nueva relación con el «hecho experimental» (las piezas no coinciden), con la necesidad física, y con la necesidad matemática. Esto, no pueden hacerlo solos (...)*

*El trabajo del profesor, en la acción didáctica conjunta, juega entonces un rol fundamental en la elaboración de una relación adecuada con el milieu y con sus eventos, que le permite «resistir» a los hábitos del contrato didáctico y renovarlos.(...) (Sensevy, 2011, p. 339).*

A este manejo del grado de «reticencia»<sup>47</sup> del profesor, Sensevy lo categoriza como «equilibración didáctica».

*La equilibración didáctica juega un rol mayor en el desarrollo de una situación adidáctica, ya desde el origen, cuando se*

*trata de construir las evidencias como tales. El trabajo del profesor es entonces decisivo. Es una consecuencia lógica del punto precedente: si las evidencias deben construirse contra el contrato actual<sup>48</sup>, es necesario que el profesor dé a los alumnos los medios de hacerlo. (Sensevy, 2011, p. 140).*

En estas observaciones que hace Sensevy, pueden verse dos fenómenos didácticos que el investigador destaca. Por un lado, reafirma el hecho de que la retroalimentación empírica que brinda la situación adidáctica no necesariamente va a lograr, por sí sola, que los alumnos abandonen una concepción falsa. Sensevy invita a no caer en una especie de «empirismo» burdo, en el que los hechos hablan por sí solos, independientemente de cómo los vemos:

*Esta «propiedad» de los hechos, la de ser contruidos como tales en un estilo de pensamiento, incita a desmarcarse de una mitología de las situaciones adidácticas en la que los hechos, justamente, hablan por sí solos, y van a poder orientar la acción de los alumnos. (Sensevy, 2011, pp. 339-340)*

Por otro lado, aprovecha esa misma limitación del *medio* para destacar que, en ciertos momentos, el profesor se puede ver en la necesidad de bajar la intensidad de su *reticencia* al dar información a los alumnos, es decir, debe aceptar dar cierta información, ciertas ayudas.

PRIMARIA Y  
SECUNDARIA

### Actividad 3.7

#### Una lección del libro de texto de primaria

Para cerrar el estudio de la noción *constante de proporcionalidad fraccionaria*, se presenta una lección de un libro de texto de sexto grado de primaria, en la que se puede identificar un acercamiento elemental a dicha noción. Después de la lección se plantean preguntas que ayudarán a analizarla.

048 095 072 073 074 075 076 077 078 079 080 081 082 083 084 085 086 087 088 089 090 091 092 093 094 095 096 097 098 099 100

# 47

lección

## Del maíz a las tortillas

Resolución de problemas de proporcionalidad

**1. Reúnete con un compañero y lee con él la siguiente información.**

	<p>En México, una hectárea de terreno puede producir entre 2 y 12 toneladas de gramos de maíz, dependiendo del clima y de la calidad del suelo. El promedio nacional es de 7 toneladas por hectárea.</p>
	<p>Con 5 kilogramos de grano, se producen aproximadamente 3 kilogramos de harina.</p>
	<p>Con 2 kilogramos de harina, se producen aproximadamente 5 kilogramos de masa.</p>
	<p>Con 10 kilogramos de masa, se producen aproximadamente 7 kilogramos de tortilla.</p>
	<p>Un kilogramo de tortilla contiene 37 tortillas aproximadamente y cuesta \$4.50.</p>

• Contesta, oralmente, las siguientes preguntas.


- ¿De qué puede depender que una hectárea de terreno produzca más o menos maíz?
- ¿Por qué con cierta cantidad de grano se produce una cantidad menor de harina, y no una cantidad igual?
- ¿Por qué con cierta cantidad de harina se produce una cantidad mayor de masa, y no una cantidad igual?

2. En la parte amarilla de la tabla que está en la siguiente página, aparecen algunos de los datos de la información anterior. Anota los datos que faltan.

3. Anota los resultados de los siguientes problemas en la parte azul de la tabla, en las casillas que les corresponden.

- a) Con 100 kg de granos, ¿cuántos kilogramos de harina se producen?
- b) Con 60 kg de harina, ¿cuántos kilogramos de masa se producen?
- c) ¿Cuántos kilogramos de masa se necesitan para producir 105 kg de tortilla?
- d) Con 100 kg de granos, ¿cuántos kilogramos de tortillas se producen?

Figura 26. Matemáticas. Sexto grado. Lección 47 (Parte I), SEP, 2001, p. 106.



	Terreno (hectáreas)	Granos de maíz (kilogramos)	Harina (kilogramos)	Masa (kilogramos)	Tortillas (kilogramos)
	1	7 000			
		5			
				5	
				10	
a)		100			
b)			60		
c)					105
d)		100			
e)		1			
f)			1		
g)				1	

4. Escribe y resuelve a continuación los tres problemas que corresponden a las flechas de la parte verde de la tabla.

Problema e) \_\_\_\_\_

Problema f) \_\_\_\_\_

Problema g) \_\_\_\_\_

5. Con los datos de tu tabla, determina si la siguiente afirmación es correcta o es falsa. Para conocer la cantidad de kg de tortillas que se pueden hacer con una cantidad de masa, basta con calcular  $\frac{2}{10}$  de la cantidad de masa.

Verificación \_\_\_\_\_

La afirmación es \_\_\_\_\_

6. Ahora, redacta en una hoja el problema que tú quieras. La condición es que se pueda resolver con los datos de la primera página, haciendo una o dos operaciones.

- Resuelve tu problema en tu cuaderno. Puedes usar calculadora.
- Entrega el problema a tu maestro para que él escriba en el pizarrón los problemas que va a analizar todo el grupo.
- Analiza con tus compañeros si los problemas son claros y si se pueden resolver con los datos que se dieron. Corrige lo que sea necesario. Después, resuelve los problemas que tu maestro te indique.






Figura 27. Matemáticas. Sexto grado. Lección 47 (Parte II), SEP, 2001, p. 107.

- a) En la lección aparecen cinco razones que funcionan como constantes de proporcionalidad. Una es, por ejemplo, «7000 kg de maíz por hectárea». Identifique las otras 4 y expresasalas con fracciones.

**SOLUCIONARIO**

- b) Las fracciones como razones constantes de proporcionalidad están implícitas y la lección se puede resolver sin hacerlas explícitas. Proporcione un ejemplo de esto. **SOLUCIONARIO**

- c) Hay una actividad en la que los alumnos podrán comprobar que una razón expresada como «por cada  $b$ ,  $a$ » se puede expresar también con una fracción « $\frac{a}{b}$  de». Identifíquela. **SOLUCIONARIO**

- d) Cabe observar que la lección aporta un contexto adecuado para que funcionen razones y/o operadores «en serie», es decir, unos después de otros. Solamente uno de los problemas requiere que el alumno aplique varias de las razones (u operadores) para calcular el dato solicitado. Identifique ese problema, y escriba uno más.

**SOLUCIONARIO**

## Tema 2. La división de fracciones y decimales en el contexto de la escala

La operación de división está muy ligada a la de multiplicación: vista como transformación, es la operación que «deshace» lo que hace la multiplicación; o es la operación que consiste en buscar cuánto vale un factor, conociendo el otro factor y el producto. Al igual que con la multiplicación, la operación de división adquiere propiedades en el conjunto de los racionales que no tenía en el conjunto de los naturales, por ejemplo, ahora podrá ocurrir que el cociente sea mayor que cualquiera de los factores.

En este apartado se interrumpe por un momento el hilo conductor de la multiplicación, para revisar algunos aspectos de la noción de división de fracciones y de decimales. Se trata de un tema de secundaria, aunque, como se verá en el aparta-

do 2.1, hay algunos casos en los que la división de fracciones es muy sencilla y, sin hacerse explícita, puede abordarse en primaria.

## 2.1 Dos casos en los que la división de fracciones tiene el mismo sentido que la división de números naturales. PRIMARIA Y SECUNDARIA

### Actividad 3.8 Problemas que se resuelven con una división de fracciones

Para cada una de las siguientes operaciones, escriba un problema que se resuelva con ellas y que incluya cantidades concretas (de peso, dinero, superficie, longitud, entre otras). Observe que en un caso es mucho más sencillo hacerlo que en el otro. Analice por qué.

a)  $\frac{3}{4} \div 5 =$

b)  $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} =$

#### *Caso 1: El divisor es entero. Los problemas de reparto.*

En la división  $\frac{3}{4} \div 5$ , el divisor es un número natural. Siendo así, esa división puede asociarse con problemas de tipo reparto, en los que una cantidad debe subdividirse en cierto número de partes iguales, por ejemplo: un terreno de  $\frac{3}{4}$  de hectárea se va a subdividir en 5 lotes iguales, ¿cuánto medirá cada uno?

Lo interesante de los problemas tipo reparto es que los alumnos que aún no saben dividir fracciones, pueden abordarlos con procedimientos personales, y pueden, con un poco de ayuda, establecer un algoritmo.

En cambio, cuando el divisor no es entero, por ejemplo, en la división  $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$ , la operación ya no puede corresponder a un reparto, pues no tiene sentido repartir entre números no enteros. Es necesario buscar otros contextos en los que la acción de repartir equitativamente tenga sentido.

### Actividad 3.9

#### Procedimientos informales para dividir una fracción entre un número natural

- a) Anote una forma en que alumnos de sexto grado, que aún no disponen de un algoritmo para dividir una fracción entre un natural, podrían resolver los siguientes problemas:
- Repartir  $\frac{3}{4}$  de pizza entre 5. ¿Cuánto toca a cada quien?
  - $\frac{6}{11}$  de un terreno se dividirá en 3 partes iguales. ¿Cuánto medirá cada parte? ¿Y si fueran 6 partes?
- b) Redacte una forma de dividir una fracción entre un número natural, que sea accesible para los alumnos. **SOLUCIONARIO**

### Actividad 3.10

#### Otros problemas que se resuelven con una división de fracciones

Para cada una de las siguientes operaciones, escriba un problema que incluya cantidades concretas (de peso, dinero, superficie, longitud...) y observe que en un caso es mucho más sencillo resolver que en el otro. Analice por qué.

a)  $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} =$

b)  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$

*Caso 2: El cociente es un número natural.*

*Los problemas de agrupamiento.*

Además de los problemas de reparto, otra familia de problemas que llevan a dividir son los de «agrupamiento», también conocidos como «de comparación» o «tasativos». En estos problemas, se trata, a final de cuentas, de ver cuántas veces una cantidad «cabe» en otra. Cuando ese número de veces es entero y relativamente pequeño, el problema puede ser bastante simple, pues basta con iterar una de las cantidades hasta obtener la otra, y contar el número de iteraciones, por ejemplo:

*¿Cuántos frascos con  $\frac{1}{4}$  de litro de crema se pueden llenar si se tienen  $5\frac{3}{4}$  litros?*

Dado que con un litro se pueden llenar 4 frascos y con  $\frac{3}{4}$  de litro se pueden llenar 3 frascos, en total se pueden llenar 23.

Si el cociente no es entero, pero es mayor que uno, podría quedar un residuo. Pero si el cociente es menor a uno, los problemas dejan de ser sencillos.

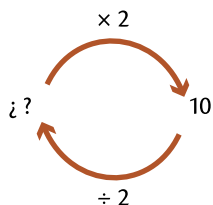
Hace falta pensar en un tipo de problema que dé significado a cualquier división, y que permita desarrollar una técnica. Los encontraremos si se considera que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Los problemas que hemos visto hasta aquí son adecuados para el tercer ciclo de primaria y para secundaria. Los siguientes, son adecuados solamente para secundaria.



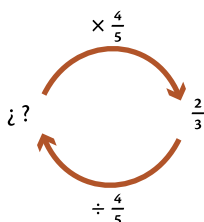
## 2.2 El caso general: la división, como operación inversa de la multiplicación. **SECUNDARIA**

Un significado básico de la división es el de ser la operación inversa de la multiplicación. La pregunta, ¿cuánto es  $10 \div 2$ ? Podría contestarse con: «es el número que multiplicado por 2, es igual a 10».



Puede decirse también: la operación  $\div 2$ , «deshace» lo que hace la operación  $\times 2$ .

De igual manera, la pregunta: ¿Cuánto es  $\frac{2}{3}$  entre  $\frac{4}{5}$ ? Podría contestarse con: «es el número que multiplicado por  $\frac{4}{5}$  da  $\frac{2}{3}$ ».



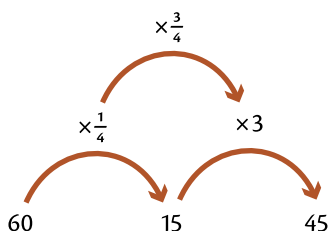
Pero... ¿Cómo encontrar el número que multiplicado por  $\frac{4}{5}$  da  $\frac{2}{3}$ ?

### Actividad 3.11 Explorando procedimientos

Explore algunas formas de hallar el número que multiplicado por  $\frac{4}{5}$  da  $\frac{2}{3}$ . **SOLUCIONARIO**

En las actividades siguientes, se analizarán algunas situaciones para que los alumnos aprendan a calcular el número que multiplicado por una fracción es igual a otra fracción.

Para entrar en materia, nos hacen falta dos herramientas. Una, recordar que un operador multiplicativo fraccionario, por ejemplo,  $\times \frac{3}{4}$  puede expresarse como la composición de dos operadores:  $\times \frac{1}{4}$  seguido de  $\times 3$  (o bien  $\times 3$  seguido de  $\times \frac{1}{4}$ ). Aplicado a 60 quedaría como sigue:



La otra herramienta es la que permite establecer el operador inverso de un operador fraccionario, es decir, el que «deshace» lo que ese operador hace: el inverso de « $\times \frac{a}{b}$ » es «entre  $\frac{a}{b}$ » o bien... «por  $\frac{b}{a}$ ». Las lecciones que se presentan en la siguiente actividad buscan proporcionar esas herramientas. La tercera lección lleva a establecer y justificar una técnica general para dividir fracciones.

## SECUNDARIA

### Actividad 3.12 Análisis de lecciones de un libro de texto sobre multiplicación y división de fracciones

Destaque cuál puede ser el propósito de cada una de las tres lecciones que se presentan en un libro de texto de segundo grado de secundaria (ver figuras 28, 29, 30, 31, 32 y 33). Para profundizar en algunos aspectos, trate de contestar las preguntas que se plantean después de cada lección.

SECUENCIA

1

## Multiplicación y división de fracciones y decimales

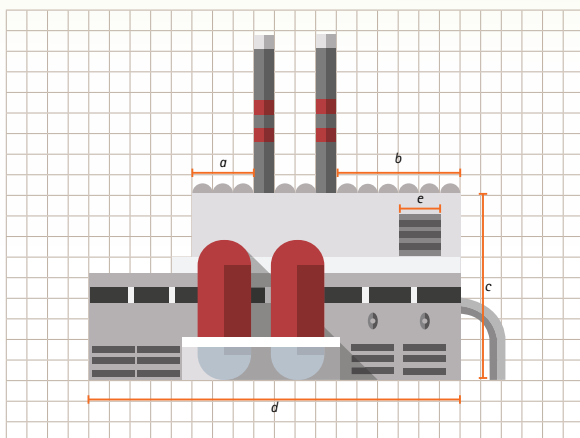
**Aprendizaje esperado:** resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

### Lección 1. Factores de escala sucesivos

- Analiza la información y haz lo que se pide.

- Al aplicar el factor de escala 1.5 al dibujo  $A_1$ , se obtiene el dibujo  $A_2$ .

Dibujo  $A_1$



- Al aplicar el factor de escala 2 al dibujo  $A_2$ , se obtiene el dibujo  $A_3$ .

- Traza los dibujos  $A_2$  y  $A_3$  en una hoja cuadrículada.
- Averigua qué factor de escala permite pasar directamente del dibujo  $A_1$  al  $A_3$  sin necesidad de calcular las medidas de  $A_2$ . Luego, aplica ese factor a las medidas de  $A_1$  y verifica que las medidas resultantes sean las mismas que las del dibujo  $A_3$  que trazaste antes.

### MÁS IDEAS

Cuando dos figuras están a escala, las medidas de los lados de una figura son proporcionales a las medidas de la otra y, por tanto, existe un número (siempre el mismo), que, al multiplicarlo por cualquier medida de una figura, se obtiene la correspondiente medida de la otra. Ese número es el *factor de escala* o *constante de proporcionalidad*.

- Reúnete con un compañero y analicen si usaron la siguiente técnica para pasar directamente del dibujo  $A_1$  al  $A_3$ . Si no la usaron, háganlo ahora y verifiquen que se obtenga el mismo resultado.

Aplicar dos factores de proporcionalidad,  $n$  y  $m$ , uno después de otro, equivale a emplear directamente el factor  $n \times m$ .

- Trabaja con un compañero. Respondan y hagan lo que se pide.

- Al aplicar el factor de escala  $\frac{1}{3}$  al dibujo  $A_1$ , se obtiene  $A_4$ . Al aplicar el factor 2 a  $A_4$ , se obtiene  $A_5$ .

- Expliquen qué dibujo es más grande:  $A_1$  o  $A_5$ .

---



---



---



---

Figura 28. Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 1, Lección 1 (Parte I), Block, García y Balbuena, 2018, p. 12

Número, álgebra y variación • Multiplicación y división

- b) Calculen y anoten, en la tabla, las medidas de  $A_4$  y  $A_5$ . Consideren como unidad de medida ( $u$ ) el lado de un cuadrado de la cuadrícula.

	Dibujo $A_1$ ( $u$ )	Dibujo $A_4$ ( $u$ )	Dibujo $A_5$ ( $u$ )
Lado $a$	3		
Lado $b$	6		
Lado $c$	9		
Lado $d$	18		
Lado $e$	2		

- c) Hagan el dibujo  $A_5$  en papel cuadrulado.
- d) ¿Qué factor de escala, aplicado al dibujo  $A_1$ , permite obtener el dibujo  $A_5$ ? Anótenlo en el óvalo superior del esquema junto a la tabla anterior.



Reúnanse con el resto del grupo para validar sus respuestas. Hagan lo siguiente.

- Comparen sus dibujos  $A_5$ . Si no son iguales, identifiquen la causa. Comenten si  $A_5$  es mayor o menor que  $A_1$  y argumenten por qué.
- Comparen sus respuestas del inciso d) en la actividad 2 y verifiquen que se relacione con la información del siguiente recuadro.

Aplicar los factores  $\frac{1}{m}$  y  $n$ , sucesivamente, equivale a usar el factor  $\frac{1}{m} \times n$ , es decir,  $\frac{n}{m}$ .

Recíprocamente, aplicar el factor  $\frac{n}{m}$  equivale a aplicar dos factores uno después de otro:  $\frac{1}{m}$  y  $n$ .

TIC  
MÁS

Practica la multiplicación de fracciones en [www.redir.mx/SCMM2-013a](http://www.redir.mx/SCMM2-013a).



2. Escribe lo que falta.

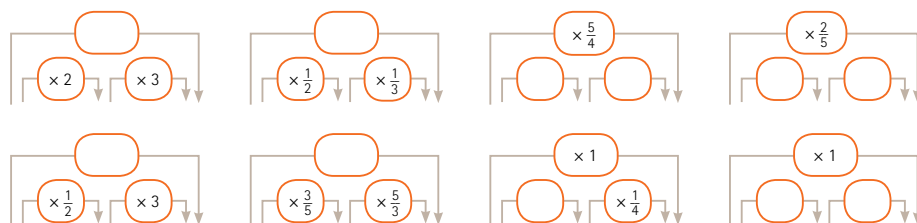


Figura 29. Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 1, Lección 1 (Parte II), Block, García y Balbuena, 2018, p. 13

- a) En el inciso 2c se pide que los alumnos tracen en papel cuadrícula las figuras. ¿Qué función puede tener esta parte de la actividad?

**SOLUCIONARIO**

**Lección 2. Factores inversos**

1. Se aplicó el factor de escala 4 a una figura  $B_1$  y se obtuvo  $B_2$ .

a) Se conocen las medidas de  $B_2$ , pero no las de  $B_1$ . Calcúlalas y escríbelas en la tabla.

b) ¿Qué factor se debe aplicar a la figura  $B_2$  para obtener  $B_1$ ? Anótalo en el óvalo inferior de la tabla.

c) De manera más general, si el factor que se aplica a una figura para obtener otra es  $\times n$ , ¿cuál es el **factor inverso**, es decir, el que aplicado a la segunda figura produce la figura original?

	Figura $B_1$	Figura $B_2$
Lado a		4
Lado b		1
Lado c		8
Lado d		3

**factor inverso:** aquel que revierte la acción de otro. Por ejemplo, multiplicar por  $\frac{1}{5}$  revierte la acción de multiplicar por 5 y viceversa. Es decir, 5 y  $\frac{1}{5}$  son factores inversos uno del otro.

**MÁS IDEAS**

El inverso multiplicativo de un número es el que multiplicado por él da 1. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de  $\frac{2}{3}$  es  $\frac{3}{2}$ , pues  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$ .

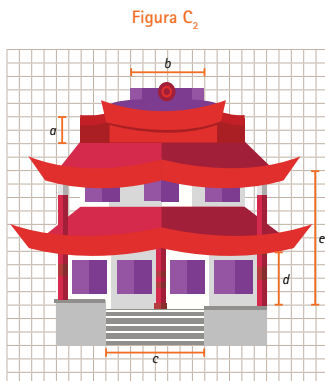
2. Trabaja con un compañero. Anoten los factores que faltan en la tabla.

Factor	2	$\frac{1}{10}$			$\frac{3}{2}$
Factor inverso			5	$\frac{1}{3}$	

Validen sus respuestas de la tabla con el resto del grupo. Después, comenten la información del recuadro.

Para revertir la acción de multiplicar por  $n$ , se aplica la operación inversa: dividir entre  $n$  o, lo que es lo mismo, multiplicar por  $\frac{1}{n}$ .

	Figura $C_1$	Figura $C_2$
Lado a		2
Lado b		6
Lado c		8
Lado d		4
Lado e		10



3. Al aplicar el factor de escala  $\frac{2}{5}$  a la figura  $C_1$ , se obtuvo  $C_2$ .

a) ¿Qué figura es mayor:  $C_1$  o  $C_2$ ?

• ¿Por qué?

b) Se tiene la figura  $C_2$ , pero no la figura  $C_1$ . Calculen las medidas de  $C_1$  y escríbanlas en la tabla.

Figura 30. Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 1, Lección 2 (Parte I), Block, García y Balbuena, 2018, p. 14.

Número, álgebra y variación • Multiplicación y división



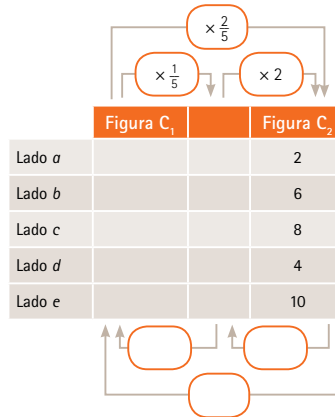
Analicen, en grupo y con ayuda del profesor, la información del recuadro, y úsenla para completar la tabla y calcular los factores inversos en los óvalos inferiores.

Una forma de encontrar las medidas de  $C_1$  es aplicar a  $C_2$  el factor inverso de  $\frac{2}{5}$ .

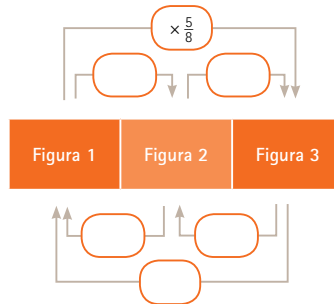
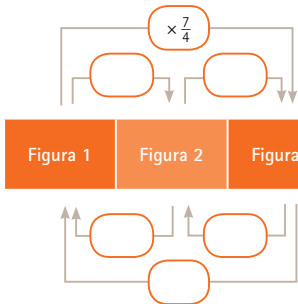
El factor  $\frac{2}{5}$  equivale a aplicar sucesivamente los factores  $\frac{1}{5}$  y 2.

Por tanto, para “desandar el camino” basta aplicar los inversos de esos factores: 5 y  $\frac{1}{2}$ .

Así, el factor inverso de  $\frac{2}{5}$  es  $\frac{5}{2}$ .



4. Anota los factores que faltan en los diagramas.



DESCUBRO MÁS

A una figura se aplica el factor  $\frac{2}{5}$  y a la figura resultante se aplica el factor inverso de  $\frac{2}{5}$ , es decir,  $\frac{5}{2}$ . ¿La figura final será mayor, menor o del mismo tamaño que la original?



5. Trabaja con un compañero. Respondan con base en las actividades de esta lección y la anterior.

a) ¿Cuál es el factor equivalente a multiplicar por  $\frac{3}{4}$  y después por  $\frac{2}{3}$ ?

---

b) En general, ¿cuál es el factor equivalente a multiplicar por  $\frac{a}{b}$  y luego por  $\frac{c}{a}$ ?

---

c) ¿Qué le ocurre a una figura al aplicar un factor y después su inverso?

---



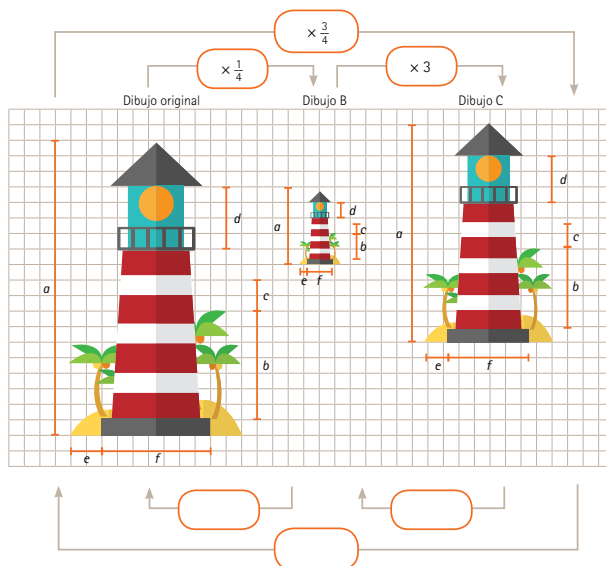
---

Figura 31. Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 1, Lección 2 (Parte II), Block, García y Balbuena, 2018, p. 15.

- b) En el punto 2 de la lección 2, la figura  $C_2$  se obtuvo al aplicar a la figura  $C_1$  el factor  $\frac{2}{5}$ . Pero la figura cuyas medidas se desconocen es, esta vez,  $C_1$ . ¿Qué error es previsible que cometan los alumnos para calcular las medidas de  $C_1$ ? **SOLUCIONARIO**

### Lección 3. Desandar el camino. El factor inverso y la división

1. Se muestran tres dibujos: el dibujo original A y los dibujos B y C.



#### DESCUBRO MÁS

Multiplicar por  $\frac{1}{4}$  equivale a dividir entre.... ¿cuánto?

- Si el factor de escala  $\frac{1}{4}$  se aplica al dibujo original A, se obtiene el dibujo B.  
¿Cuál es el factor de escala que, aplicado a B, proporciona las medidas del dibujo original A? \_\_\_\_\_
- Si el factor de escala 3 se aplica a B, se obtiene C.  
¿Cuál es el factor inverso de 3? \_\_\_\_\_
- Si el factor de escala  $\frac{3}{4}$  se aplica al dibujo original A, se obtiene C.  
¿Cuál es el factor inverso de  $\frac{3}{4}$ ? \_\_\_\_\_
- Anota los factores de escala inversos en los óvalos de la parte inferior del dibujo anterior.

- Compara tus respuestas con las del grupo. Comenten la información del siguiente recuadro.

Figura 32. Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 1, Lección 3 (Parte I), Block, García y Balbuena, 2018, p. 14.

Número, álgebra y variación • Multiplicación y división

Hay dos maneras de revertir la acción de multiplicar un número  $n$  por  $\frac{3}{4}$ .

Una consiste en multiplicar  $n$  por el factor inverso de  $\frac{3}{4}$ , que es  $\frac{4}{3}$ ; es decir,  $n \times \frac{4}{3}$ . La otra es recordar que la división revierte lo que hace la multiplicación; entonces, para revertir  $n \times \frac{3}{4}$ , se divide  $n \div \frac{3}{4}$ .

Las dos maneras de revertir lo que hace la multiplicación son equivalentes:  $n \times \frac{4}{3} = n \div \frac{3}{4}$ .

De manera general, para dividir un número  $n$  entre una fracción  $\frac{a}{b}$ , se puede multiplicar  $n$  por el inverso multiplicativo de la fracción  $\frac{a}{b}$ , es decir por  $\frac{b}{a}$ .

2. Resuelve las divisiones como en el ejemplo.

a)  $6 \div \frac{3}{4} = 6 \times \frac{4}{3} = \frac{24}{3} = 8$

b)  $2 \div \frac{9}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$

c)  $\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$

d)  $10 \div \frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$

3. Responde en tu cuaderno. Si el factor de escala  $\times 0.2$  se aplica a una figura, ¿esta se amplía o se reduce? ¿Cuál es el factor recíproco de  $\times 0.2$ ?

4. Resuelve las divisiones.

a)  $7 \div 0.1 = 7 \div \frac{1}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $3 \div 0.25 = \underline{\hspace{2cm}}$

MÁS IDEAS

Para encontrar el factor inverso de un número decimal conviene escribirlo en forma de fracción; por ejemplo,  $0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ .

Taller de matemáticas

1. Analiza las técnicas para resolver una división cuando el divisor no es entero. Después, resuelve, en tu cuaderno, las divisiones que se muestran con el método que prefieras.

Técnica 1 (solo sirve para dividir decimales)

Multiplicar ambos términos por una potencia de 10 (10, 100, 1000...) para obtener una división equivalente (con el mismo cociente), pero con dividendo y divisor enteros, por ejemplo:

- $1.7 \div 0.1 = 17 \div 1$  (ambos términos se multiplicaron por 10) = 17;
- $3.5 \div 0.05 = 350 \div 5$  (se multiplicó por 100) = 70.

Técnica 2 (para fracciones)

Multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor:

- $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ ;
- $2 \div 0.1 = 2 \div \frac{1}{10}$  (se convirtió el divisor en fracción) =  $2 \times \frac{10}{1} = 2 \times 10 = 20$ ;
- $0.25 \div 0.33 = \frac{25}{100} \div \frac{33}{100} = \frac{25}{100} \times \frac{100}{33} = \frac{25}{33}$ .

a)  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

b)  $\frac{2}{3} \div \frac{3}{11}$

c)  $1.5 \div 0.5$

d)  $\frac{1}{5} \div 0.2$

e)  $5 \div \frac{1}{3}$

f)  $\frac{1}{10} \div \frac{100}{125}$

g)  $2 \div 0.25$

h)  $\frac{3}{5} \div 0.1$

i)  $\frac{2}{3} \div \frac{1}{3}$

j)  $\frac{4}{5} \div \frac{4}{5}$

k)  $0.5 \div 10$

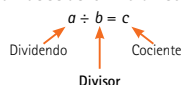
l)  $0.1 \div \frac{3}{5}$

m)  $1 \div \frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$

n)  $1.7 \div 0.28$

o)  $0.025 \div 0.005$

**divisor:** en una división, el número entre el que se divide se denomina divisor.



MÁS IDEAS

Para ciertos casos particulares, hay formas simples de resolver una división; por ejemplo, se puede saber que  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$  al observar que  $\frac{1}{4}$  "cabe" exactamente dos veces en  $\frac{1}{2}$ .

Figura 33. Matemáticas 2. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 1, Lección 3 (Parte II), Block, García y Balbuena, 2018, p. 17.



- c) En esta lección se plantea un razonamiento matemático difícil de seguir para los alumnos: si dos operaciones permiten obtener, cada una por su lado, el inverso de un número, esas dos operaciones son equivalentes. ¿Cómo podría ayudar a los alumnos a comprender este razonamiento? [SOLUCIONARIO](#)

---

## SECUNDARIA

### Actividad 3.13

#### **Análisis de lecciones de un libro de texto sobre multiplicación y división de decimales**

Las siguientes actividades son adecuadas para realizar un trabajo de afirmación en el nivel de secundaria. Se recomienda resolverlas y, después, contestar las preguntas que se plantean al final de cada lección.

SECUENCIA  
**23**

## Problemas de división con decimales

### Lección 74. Por cada multiplicación, dos divisiones

**Aprendizaje esperado:**

Resuelve problemas de multiplicación con fracciones y decimales, y de división con decimales.

1. Con la siguiente información se pueden plantear tres problemas: uno de multiplicación y dos de división.

**Dato 1**  
Ernesto da doce pasos.

**Dato 2**  
Cada paso mide  $\frac{3}{4}$  m.

**Dato 3**  
En total, Ernesto avanza 9 m.

- a) Para plantear los problemas, basta con proporcionar dos datos y preguntar por el tercero. Si se dan los datos 1 y 3, y se pregunta por el 2, se obtiene este problema:

- Al dar doce pasos, Ernesto avanza 9 m. ¿Cuánto mide cada paso?
- Resultado: cada paso mide  $\frac{3}{4}$  m. Operación:  $9 \div 12 = \frac{3}{4}$ .

- b) Escribe los otros dos problemas en tu cuaderno.

2. Anota, en tu cuaderno, los tres problemas que se obtienen al preguntar por cada uno de los datos de cada inciso. Resuélvelos y anota el resultado y la operación.

a)	<b>Dato 1</b> Luis reparte tres pasteles.	<b>Dato 2</b> Luis reparte los pasteles entre cuatro amigos.	<b>Dato 3</b> A cada amigo le corresponden $\frac{3}{4}$ de pastel.
b)	<b>Dato 1</b> El auto recorrió 425.6 km.	<b>Dato 2</b> El combustible del auto rinde 17.5 km por litro.	<b>Dato 3</b> El auto consumió 24.32 L de gasolina.
c)	<b>Dato 1</b> El frasco de medicina contiene 12 dL.	<b>Dato 2</b> Una dosis es de 0.5 dL.	<b>Dato 3</b> El frasco rinde 24 dosis.
d)	<b>Dato 1</b> El factor de escala es $\frac{3}{4}$ .	<b>Dato 2</b> Un lado A de la figura original mide 4 cm.	<b>Dato 3</b> El lado A' de la copia mide 3 cm.

Figura 34. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 23, Lección 74 (Parte I), Block, García y Balbuena, 2018, p 162.

Número, álgebra y variación • Multiplicación y división



Con tus compañeros, revisa los problemas que elaboraron y hagan en grupo lo siguiente.

- En cada uno de los problemas, analicen si se entiende el planteamiento y lo que se pregunta.
- Verifiquen si en cada inciso efectuaron tres problemas: uno que se resuelve con multiplicación y dos con división.
- Identifiquen al menos una división cuyo cociente sea mayor que el dividendo y al menos una multiplicación cuyo producto sea menor que uno de los factores.



3. Formula un problema con cada operación. Procura que se relacione con una situación de la vida cotidiana.

a)  $1.8 \div 10 = 0.18$

---



---



---



---

b)  $0.25 \div 0.05 = 5$

---



---



---



---

c)  $25 \times 0.1 = 2.5$

---



---



---



---

d)  $5.2 \times 2 = 10.4$

---



---

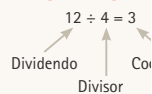


---

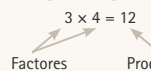


En grupo y con ayuda del profesor, valida que los problemas que plantearon se resuelven con las operaciones indicadas.

MÁS IDEAS



MÁS IDEAS




MÁS IDEAS

Cuando el divisor es número natural, por ejemplo, el 10 del inciso a), pueden plantearse problemas de repartir una cantidad en partes iguales. Pero cuando el divisor es decimal, como en el inciso b), deben explorarse otros tipos de relaciones, por ejemplo, ver cuántas veces una cantidad es igual a otra.

Figura 35. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 23, Lección 74 (Parte II), Block, García y Balbuena, 2018, p 163.

En la lección anterior se plantean multiplicaciones y divisiones de números decimales, pero no es necesario resolverlas, pues ya se cuenta con el resultado. Entonces, ¿cuál puede ser el propósito? **SOLUCIONARIO**

### Lección 76. Multiplicaciones que achican, divisiones que agrandan

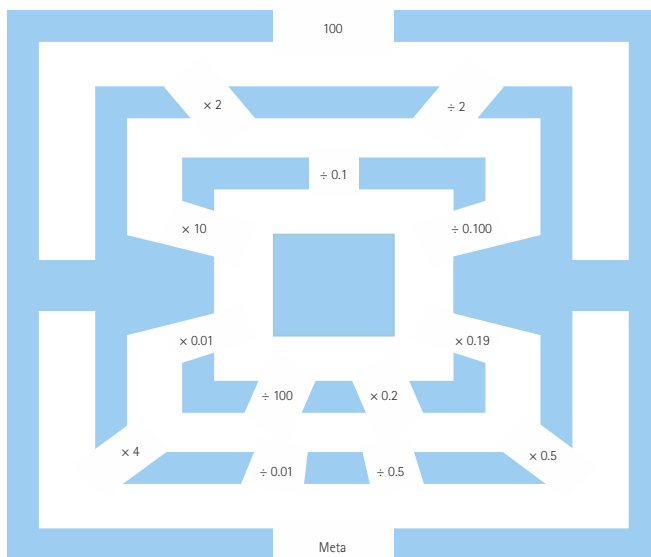
-  1. Reúnete con un compañero. Jueguen al laberinto contra otra pareja.

#### Reglas

- Ambas parejas empiezan el juego con 100 puntos.
- Cada pareja traza, en su laberinto, un camino continuo desde la salida hasta la meta.
- Deben efectuar cada operación con los puntos que tienen hasta ese momento; el resultado de la operación será el nuevo puntaje con que continuarán su camino.
- No se puede pasar dos veces por una misma operación.
- Pueden usar calculadora.
- Gana la pareja que llegue con más puntos a la meta.

#### MÁS IDEAS

Una regla para hacer el juego más retador es que las operaciones se resuelvan sin calculadora.




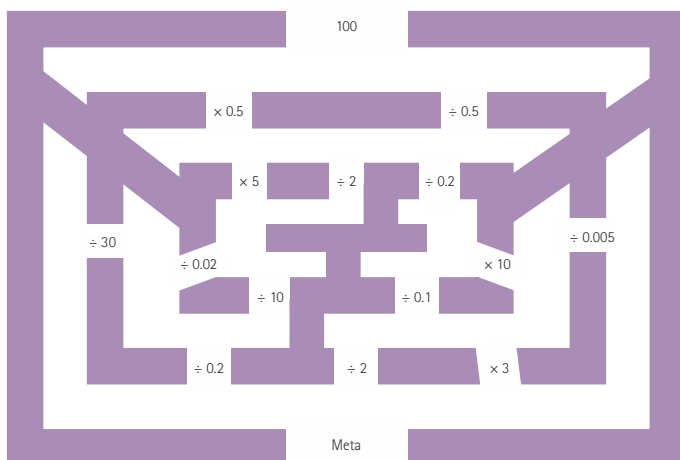
-  En grupo, analicen algunos juegos ganadores. Determinen qué pareja obtuvo el mejor puntaje. Revisen si es posible lograr uno mayor y expliquen por qué.

Figura 36. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 23, Lección 76 (Parte I), Block, García y Balbuena, 2018, p 166

Número, álgebra y variación • Multiplicación y división

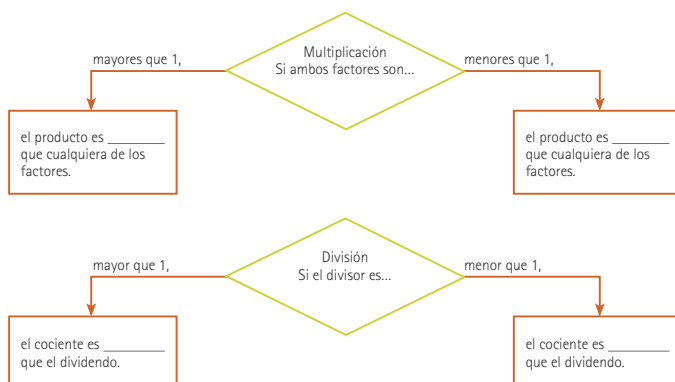
2. Jueguen ahora con el siguiente laberinto. Las reglas son las mismas de la actividad anterior.



- En grupo, discutan cuál es el mayor puntaje posible. Anoten sus conclusiones en su cuaderno.

Taller de matemáticas

1. Completa el diagrama con las palabras *mayor* o *menor*. Después, ejemplifica cada caso.



Ejemplo 1: \_\_\_\_\_ Ejemplo 2: \_\_\_\_\_

Ejemplo 3: \_\_\_\_\_ Ejemplo 4: \_\_\_\_\_

MÁS IDEAS

Algunas de las propiedades de la multiplicación y la división que se ejemplifican en el diagrama no valen para los números negativos. En cursos posteriores aprenderás por qué.

Figura 37. Matemáticas 1. Secundaria. Conecta Más. Secuencia 23, Lección 76 (Parte II), Block, García y Balbuena, 2018, p 167.

Esta lección destaca ciertas ideas que se tienen de la multiplicación y de la división en los números naturales, que ya no se cumplen en el conjunto de los decimales. ¿Puede decir qué ideas son esas?

**SOLUCIONARIO**

### **Tema 3. La multiplicación de fracciones y decimales en el cálculo del área del rectángulo**

Para concluir, se estudiará la noción de multiplicación de fracciones desde los problemas de productos de medidas, específicamente el cálculo del área de un rectángulo. Este acercamiento se puede considerar como un complemento del anterior (la fracción como operador multiplicativo), y puede abordarse antes o después de aquel.

Como se adelantó en la introducción, se estudiarán dos aspectos. Por una parte, la interpretación clásica del producto de dos fracciones como el área de un rectángulo cuyos lados miden esas fracciones. Esta interpretación permite justificar el algoritmo para multiplicar dos fracciones.

Después, abordaremos un problema, tomado de una secuencia desarrollada por Régine Douady (1980) que consiste en aproximar las medidas de los lados de cuadrados y de rectángulos, para que tengan un área dada. Este acercamiento nos llevará a la puerta de entrada de unos nuevos números, los irracionales, los cuales no se pueden expresar con decimales, pero sí se pueden aproximar.

### 3.1 Del área de un rectángulo cuyos lados miden fracciones, al algoritmo de la multiplicación

PRIMARIA Y SECUNDARIA

#### Actividad 3.14 Desarrollo del algoritmo de la multiplicación de fracciones

En la actividad 3.2 se vio un primer acercamiento al algoritmo de la multiplicación, en el contexto de fracciones de vueltas alrededor de un circuito que mide algunos kilómetros y fracción. Ahora se verá un segundo acercamiento en el contexto del área del rectángulo.

A continuación se presentan tres actividades; las de los incisos **a** y **b** son problemas para los alumnos. Se trata de calcular el perímetro y el área de varios rectángulos. Si los alumnos aún no saben multiplicar fracciones, pueden hallar el área calculando áreas parciales del rectángulo y luego sumándolas. Mediante actividades como estas, los alumnos pueden llegar a establecer el algoritmo de la multiplicación. La actividad del inciso **c** solo es para el docente. Se sugiere que haga las tres actividades.

- a) Dibujar cinco rectángulos diferentes que tengan un lado de  $2\frac{3}{4}$  centímetros. Para cada uno calcular el perímetro y el área (en caso de plantear la actividad a un grupo de alumnos, se puede dar una medida distinta a cada alumno).
- b) Dibujar cinco rectángulos cuyo perímetro sea de 6 cm y calcular el área de cada uno.
- c) Explique un procedimiento para calcular el área de un rectángulo cuyos lados miden,  $\frac{2}{3}$  de unidad y  $\frac{3}{4}$  de unidad, sin usar el algoritmo de la multiplicación de fracciones. Explique cómo se puede inferir dicho algoritmo. **SOLUCIONARIO**

### 3.2 Aproximaciones al área de un rectángulo mediante decimales. PROFUNDIZACIÓN SECUNDARIA

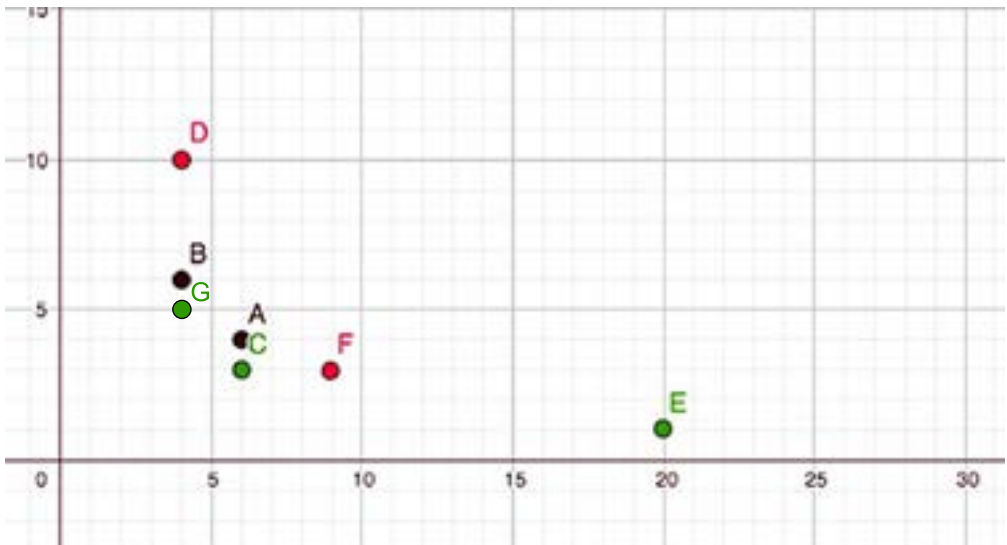
#### Actividad 3.15 Rectángulos con un área dada

En esta actividad, se enfrenta el problema de hallar rectángulos que tengan un área dada o que se aproximen a esa área. El problema implica multiplicar fracciones y decimales que arrojen cierto resultado o que encuadren números inalcanzables con fracciones y decimales.

En una hoja de papel cuadriculado, de preferencia papel milimétrico, trace los dos ejes de un sistema de coordenadas. Cada punto del plano representará un rectángulo, las coordenadas del punto representan las dos dimensiones del rectángulo: largo y ancho.

Ubique algunos puntos de color, de la siguiente manera:

- Puntos verdes. Corresponden a las áreas menores que 24.
- Puntos negros. Corresponden a las áreas iguales a 24.
- Puntos rojos. Corresponden a las áreas mayores que 24.





Observe que los puntos negros (que corresponden a los rectángulos de área 24) forman la frontera entre los puntos rojos y los verdes.

Trace una vertical que pase por cualquier abscisa, por ejemplo, 4. Observe que en esa vertical hay un solo punto negro: (4, 6). Debajo de ese punto, los puntos son verdes, y arriba son rojos. Ubique uno de cada color, anote sus coordenadas.

De igual forma, sobre cada horizontal, solo hay un punto negro, por ejemplo, en la horizontal que pasa por la ordenada 12, el punto negro es (2, 12). A la izquierda de la línea, los puntos son verdes, a la derecha son rojos. **SOLUCIONARIO**

Encuentre el punto negro, que tiene por abscisa 7. **SOLUCIONARIO**

Encuentre los puntos negros que tienen por abscisa: 2, 5, 8, 10, 24, 30.

En esta actividad fue posible encontrar las medidas de los lados de rectángulos, que dan un área dada. Las medidas fueron números naturales o fracciones. En la actividad siguiente aparece una nueva dificultad...

### Actividad 3.16

#### Rectángulos de área 27 unidades

- Ahora los puntos negros corresponderán a rectángulos de área 27. Ubique algunos puntos verdes, negros, y rojos. Anote sus coordenadas.
- ¿Hay entre los rectángulos de área 27 uno que sea cuadrado?
- Busque cuadrados cuya área sea lo más próxima posible a 27.
- Observe que es más fácil usar fracciones decimales para «encuadrar» la medida del lado del cuadrado cuya área se aproxima a 27, por ejemplo,

$$5 + \frac{1}{10} + \frac{9}{100} < \sqrt{27} < 5 + \frac{2}{10}$$

- Repita la actividad ahora con rectángulos de área 23 y 35. Utilice notación decimal y calculadora para facilitar los cálculos.

*Los números decimales, para aproximar a los números reales* **PROFUNDIZACIÓN**

En la actividad anterior los números decimales se usaron para *aproximar* medidas que no se pueden expresar de manera exacta con ninguna fracción (como el número que multiplicado por sí mismo da 27, es decir,  $\sqrt[3]{27}$ ). Esas medidas son *números irracionales*.

Otros dos ejemplos muy conocidos de números irracionales son: la medida de la diagonal de un cuadrado cuyos lados miden una unidad (o sea, la raíz de 2) y el número que multiplicado por el diámetro de un círculo, da como resultado la circunferencia (Pi).

Los números irracionales, junto con los racionales, forman al conjunto de los números reales. Se pone así de manifiesto la especificidad de los decimales que es ser «aproximaciones técnicamente prácticas de los reales» (Douady, 1980).

## Colofón

Aquí termina este viaje a través de la enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica. En el trayecto usted seguramente comprobó que se trata de un tema con numerosas conexiones con otros —sobre todo con temas de proporcionalidad y de medición— y con varias entradas posibles. Son nociones que se aprenden y fortalecen durante toda la educación básica y más allá. Se espera que, con la experiencia que usted tiene como docente, al estudiar este material, se sienta mejor armado para analizar, adaptar y mejorar las propuestas didácticas que se ofrecen en este y en otros materiales.

# Solucionario

## Capítulo 1. Las fracciones y la división

### Actividad 1.5

#### ¿Se puede repartir entre 3 partes mediante biparticiones?

Una demostración es la siguiente: para que, del total de pedacitos generados por bipartición, digamos  $2^n$  pedacitos (2, 4, 8, etc.), se pueda tomar exactamente  $\frac{1}{3}$ , es necesario que  $2^n$  sea divisible entre 3. Para ello, sería necesario que entre los factores en los que se puede descomponer  $2^n$ , hubiera un 3, y sin embargo no es así. En la descomposición de  $2^n$  en factores primos, solamente hay factores «2». Esta demostración, basada en la descomposición en factores primos, es similar a la que se propone para ver qué fracciones son decimales y cuáles no, en el apartado «¿Cómo saber si una fracción tiene una equivalente decimal o no?», del tema 5, del capítulo 2, del volumen 1.

### Actividad 1.6

#### Analizar una lección de un libro de texto

##### INCISO A

Si se quiere averiguar cuántos alfajores de los 9 por repartir, le toca a cada uno de los 3 niños es suficiente dividir 9 entre 3 y obtener la respuesta 3 alfajores. Para 6 niños se podría pensar que, al doble de niños,

le corresponderá la mitad de lo que le tocaba en el reparto anterior, o sea la mitad de 3 que es «un alfajor y medio». La relación inversa, «si hay más niños le tocan menos alfajores», es muy importante en fracciones. También se puede pensar —sin recurrir a la relación anterior— que se puede entregar 1 alfajor a cada niño y aún quedarían 3 para repartir entre los 6 niños, y podría recurrirse a dividir los alfajores por la mitad y entregar una de ellas a cada niño, o sea que recibirá finalmente un alfajor y medio, que es el mismo resultado obtenido con la forma de distribución anterior. Si se reparten ahora los 9 alfajores entre 4 niños será necesario recurrir a la partición de uno o varios alfajores en 4 partes iguales.

### INCISO B

Puede observarse que, a partir del inciso **2b**, todas las tareas del ejercicio 2 corresponden a las mismas cantidades de alfajores y de niños. En el inciso **2b** se continúa con la situación de repartir 9 alfajores entre 4 niños, pero ahora se pregunta si la respuesta «a cada niño le corresponden 2 alfajores y la cuarta parte de otro», es correcta. Se trata de **validar** la respuesta, es decir, averiguar si esa es la respuesta correcta o no. ¿Por qué se puede considerar como otro tipo de tarea? Justamente porque es una pregunta de validación y porque habilita un procedimiento diferente: los alumnos pueden averiguar si 4 veces esa cantidad permite obtener los 9 alfajores que había. Esta forma de razonar permite vincular la división con la multiplicación, aunque todavía los alumnos estén trabajando con dibujos y sumas. También podrían encontrar la cantidad de alfajores que le tocan a cada niño y compararla con la respuesta dada. Ambos procedimientos son interesantes e importantes.

En el inciso **2c** se proporcionan tanto las cantidades involucradas (9 alfajores, 4 niños), como la respuesta, esto es, la cantidad que le corresponde a cada niño ( $2 \text{ y } \frac{1}{4}$ ). ¿Cuál es la tarea entonces? Se puede observar que, hasta este momento, las fracciones involucradas en las tareas habían estado escritas con letras: «2 alfajores y la cuarta parte de otro». Ahora la tarea es: **escribir con números** esa cantidad. Otra escritura que puede aparecer es, por ejemplo:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ .

Una tarea bastante diferente a las anteriores es solicitar que se explique qué reparto se habrá realizado si a cada niño le tocó  $\frac{4}{2} + \frac{1}{4}$  (inciso **2d**). Se espera que se interprete la escritura numérica en relación con la situación y el tipo de reparto y no con el valor numérico de la expresión. Por ejemplo  $\frac{4}{2}$  puede corresponder a partir cada uno de 8 alfajores en 2 partes iguales y por lo tanto a cada niño le corresponderá 4 medios, y luego se partió el último alfajor en 4 partes iguales, y a cada niño le tocó además un cuarto.

Una de las ideas centrales de estas actividades es la de equivalencia de expresiones fraccionarias, por ejemplo, en el inciso **3c** aparecen 6 escrituras aditivas, de las cuales 3 son correctas y 3 incorrectas.

---

### Actividad 1.7

#### ¿Cuál de dos repartos arroja pedazos más grandes?

Los primeros dos alumnos (Itzel y Arturo), intentan ver cuánto le toca a cada niño, en cada reparto. Después intentan comparar esos valores unitarios. Los alumnos que, como estos dos, hicieron esto, expresan los resultados de los repartos con fracciones verbales (no las escriben), pero casi todos resuelven la comparación en el nivel de la representación gráfica, lo cual es difícil pues las fracciones  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{7}$  son muy próximas.

Las otras dos alumnas (Nancy y Adriana) logran hacer la comparación sin hacer los repartos y por lo tanto sin saber qué porción toca a cada niño. Lo hacen generando el reparto «2 pasteles, 6 niños» que es equivalente al reparto de la mesa E (1 pastel, 3 niños), y que tiene el mismo número de pasteles que la F, lo que permite comparar. ¡Es un procedimiento muy económico!

---

### Actividad 1.9

#### Otra vez: ¿de qué tamaño era el entero?

##### INCISO A

La barra que se ve corresponde a  $\frac{2}{5}$  del entero. Se necesita determinar el entero, esto es, los  $\frac{5}{5}$ . Para ello, conviene averiguar primero  $\frac{1}{5}$ , y así,

luego, se podría encontrar la unidad, multiplicando por 5. Al dividir la barra que se muestra entre 2 (ya sea el total de cuadritos, o bien partirlo a la mitad, con relación al dibujo) se determina  $\frac{1}{5}$ , el cual luego, repetido 5 veces, daría la unidad. Es decir,  $\frac{2}{5}$  tiene 18 cuadritos, entonces  $\frac{1}{5}$  tiene 9 cuadritos, y el entero, o sea  $\frac{5}{5}$  tiene 45 cuadritos. Un error previsible es que los alumnos consideren que la barra que se ve es el entero.

Cuando ya se sabe que el chocolate entero tiene 45 cuadritos, se puede pensar en la segunda pregunta: ¿Solamente hay una solución? Puesto que hay más de una multiplicación que da 45, hay más de una solución:  $3 \times 15$ , pero también  $9 \times 5$ , aunque cambie la forma de la barra.

### INCISO B

La porción que se da es  $1\frac{1}{3}$  del entero, esto es  $\frac{4}{3}$ . Entonces  $\frac{1}{3}$  de la barra tiene 24 cuadritos entre 4, que son 6 cuadritos. La barra completa está formada por  $\frac{3}{3}$ , por lo tanto tiene 6 cuadritos por 3, es decir, 18 cuadritos.

### INCISO C

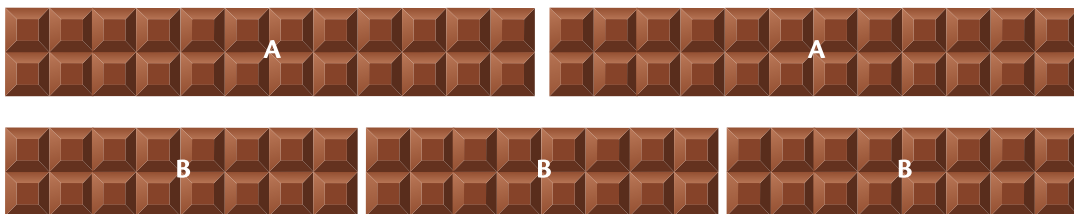
Hay infinidad de posibilidades: 2 chocolates entre 3 niños, 4 chocolates entre 6 niños, 6 chocolates entre 9 niños, etc.

El problema es difícil, no obstante, se puede plantear a alumnos de tercer ciclo de primaria, o en secundaria. ¿Cómo podrían resolverlo? Una posibilidad es por ensayo y error, en el nivel concreto: ¿se habrá repartido una barra entera entre 2? Se puede observar rápidamente que no, midiendo el largo de la barra en cuadritos y dividiendo entre 2, o bien, repartiendo una barra entre dos. Se sigue probando con otras posibilidades, ya sea en el nivel concreto (repartiendo barras enteras), o solo a nivel numérico, considerando que la barra entera tiene 24 cuadritos y la porción tiene 16 cuadritos. Un obstáculo por franquear consiste en considerar la posibilidad de repartir varias barras enteras y no una sola.

Otro procedimiento, es el llamado «por conmensuración». Es poco probable que surja espontáneamente, lo mostramos porque es en sí interesante. Se basa en lo siguiente:

Si se pudieran juntar todos los chocolates que se repartieron, por un lado, y todos los pedazos que fueron repartidos, por otro, se deberían obtener dos cantidades de chocolate iguales.

Entonces, se pueden juxtaponer barras enteras y porciones hasta lograr que coincidan las dos longitudes. La primera coincidencia ocurrirá con 2 barras enteras y 3 porciones, por lo tanto se puede decir que se repartieron 2 barras enteras entre 3 niños.



Si se siguen repitiendo las barras enteras, se obtendrá otra coincidencia en 4 barras enteras y 6 porciones. Se puede inferir que hay más coincidencias posibles.

Una vez que los alumnos resolvieron el problema a través de algún otro procedimiento, se les puede mostrar este procedimiento como una manera más de hallar el resultado.

---

### Actividad 1.11

#### Aproximaciones al cociente

##### INCISO A

Tres de los caminos fueron:

Procedimiento 3:  $m \div n = m \text{ veces } (1 \div n) = m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$

Procedimiento 4:  $m \div n = \frac{(m \times n)}{n} \div n = \frac{m}{n}$

Procedimiento 5:  $m \div n \rightarrow$  cociente decimal  $\rightarrow$  fracción

### INCISO B

Favoreció, en alguna medida, procedimientos como el de considerar que en 4 pasteles entre 5 niños, les toca 4 veces lo que les tocaría si solamente hubiera un pastel (entre los mismos 5 niños).

### INCISO C

Algunas de las ocasiones en las que se hace uso, de manera implícita, de la definición de fracción como cociente son:

- Cuando se enseña a pasar una fracción a expresión decimal, dividiendo numerador entre denominador, por ejemplo, para pasar  $\frac{5}{8}$  a expresión decimal se hace  $5 \div 8 = 0.625$
- Cuando se usa la barra de la fracción para indicar división, por ejemplo, al expresar fórmulas como la del área del triángulo:  $\frac{b \times h}{2}$

De lo anterior no se desprende que «no se deba hacer» el uso implícito referido, pero sí, al menos, informar a los alumnos que se trata de una relación (entre fracción y división) que aún no se ha justificado y que posiblemente más adelante estudiarán.

---

### Actividad 1.12

#### Dos maneras de presentar un problema. ¿Se obtiene el mismo problema?

### INCISO A

Se acaba de ver que la división de  $a$  unidades entre  $b$  tiene como cociente a la fracción  $\frac{a}{b}$  de unidad. Recíprocamente, se infiere que, si a cada uno le tocaron  $\frac{a}{b}$  de unidad, entonces se repartieron  $a$  unidades entre  $b$ . En particular, si a cada niño le tocaron  $\frac{2}{3}$  de galleta, el reparto pudo ser de 2 galletas entre 3 niños.



Pero hay otras respuestas posibles. Si consideramos la equivalencia  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ , podríamos decir que se repartieron 4 galletas entre 6 niños. Y así, cada fracción equivalente a  $\frac{2}{3}$  da lugar a otro reparto posible.

¿Cómo podrían resolver el problema alumnos de sexto grado de primaria o primer grado de secundaria? Es muy probable que ellos no apliquen de entrada el conocimiento que usamos aquí (que la división de  $a$  entre  $b$  es  $\frac{a}{b}$ ). Empezarán haciendo una búsqueda por ensayo y error, proponiendo números de galletas y de niños y verificando cada vez si el reparto da los  $\frac{2}{3}$ . Después de esta búsqueda, puede ser oportuno recordarles la posibilidad de usar el hecho de que la división de  $a$  unidades entre  $b$  es  $\frac{a}{b}$  de unidad.

## INCISO B

En problema de la actividad **1.9c**, se tiene una representación gráfica de las cantidades físicas entero y pedazo, pero no la fracción del entero que representa el pedazo. Por lo tanto, el problema **1.9c** tiene algo que facilita, la representación gráfica, pero algo que dificulta: no hay números.

---

### Actividad 1.14

**¿Existen fracciones mayores que  $\frac{1}{4}$   
pero menores que  $\frac{1}{3}$ ?**

## INCISO A

En el episodio pueden verse dos dificultades. Por una parte, los alumnos tienden a proponer únicamente fracciones unitarias ( $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$ ), mostrando que estas son las que dominan mejor, en comparación con las no unitarias.

## INCISO B

El otro problema que se vislumbra, aunque aún no de manera muy clara, es el de la densidad. Los alumnos no muestran seguridad de que entre las fracciones  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{4}$  exista otra fracción. En efecto, si solamente existieran las fracciones unitarias, sería cierto que entre  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{4}$  no habría ninguna fracción.

---

### Actividad 1.15

**¿Por qué 5 unidades entre 7 es  $\frac{5}{7}$  de unidad?**

## INCISO B

El cociente  $a$  unidades entre  $b$  es igual a  $a$  veces el de 1 unidad entre  $b$ . Dado que el cociente de 1 unidad entre  $b$  es  $\frac{1}{b}$  de unidad, el cociente de  $a$  unidades entre  $b$  debe ser  $a$  veces  $\frac{1}{b}$  de unidad, esto es,  $\frac{a}{b}$  de unidad. La clave estuvo en pasar por la división de una sola unidad.

---

### Actividad 1.16

**¿En cuántos pedazos dividir cada unidad para que al dividir esa cantidad de pedazos entre 9 no sobre ninguno?**

Un ejemplo de residuo: si se divide cada una de las 9 unidades entre 5, se obtienen 45 quintos. Estos 45 quintos se dividen entre 7 para ver el tamaño de cada paso, y se obtienen  $\frac{6}{5}$  por paso, pero queda un residuo de  $\frac{3}{5}$ . Si se dan pasos de  $\frac{6}{5}$  de unidad, en 7 pasos se llega a  $\frac{42}{5}$ , es decir,  $8\frac{2}{5}$  unidades y no a 9 unidades.

Para que no quede un residuo, el número de partes en que se divide cada unidad debe ser el mismo número de pasos, es decir, el divisor, que en este caso es 7.

---

## Actividad 1.17

### Réplica de un procedimiento y justificación

#### INCISO B

Una posibilidad es explicar algebraicamente el procedimiento que se presentó.

$$a \div b = \frac{ab}{b} \div b = \frac{(ab \div b)}{b} = \frac{a}{b}$$

Por ejemplo, explicar estos pasos:

- Al dividir  $a$  unidades en  $b$  partes, se obtienen  $a$  por  $b$  partecitas de  $\frac{1}{b}$  es decir, en total  $\frac{ab}{b}$  de unidad.
- Al repartir  $\frac{ab}{b}$  entre  $b$ , toca justamente a cada uno  $\frac{a}{b}$ .

---

## Actividad 1.18

### ¿Hay un número entre 1.1. y 1.2?

Primera pregunta: ¿Hay o no un número comprendido entre 1.1 y 1.2?  
Sí, hay infinitos. Por ejemplo: 1.11

Segunda pregunta: ¿El cociente de dos números naturales siempre se puede expresar de manera exacta mediante un decimal?

No. Los únicos que se expresan de manera exacta con un decimal son los que corresponden a fracciones decimales. Para más información, consulte al apartado «¿Cómo saber si una fracción tiene una equivalente decimal o no?» en el tema 5 del capítulo 2 del volumen I.

Veamos dos ejemplos.

¿El cociente  $15 \div 12$  se puede expresar de manera exacta con un decimal?

$15 \div 12$  es  $(3 \times 5) \div (3 \times 4)$ . El 3 se elimina y queda  $5 \div 4$ .

4 sí es divisor de una potencia de 10, es divisor de 100 ( $4 \times 25 = 100$ ). Entonces la división  $5 \div 4$ , es equivalente a la división  $125 \div 100$ , y es igual a 1.25.

En cambio, el cociente de  $2 \div 3$  no se puede expresar con un decimal finito de manera exacta, pues 3 no es divisor de una potencia de 10.

$2 \div 3 = 0.666\dots$  (ver el tema 5 del capítulo 2 «Los decimales y la medida», del volumen I).

---

### Actividad 1.19

#### Diferencias entre el problema de repartir pasteles, y el de hallar el tamaño del paso de los robots.

##### INCISO A

Un procedimiento para la división  $a$  unidades entre  $b$  que se identificó en los dos contextos es:

Partición de las  $a$  unidades en  $b$  partes, para obtener  $ab$  pedacitos de tamaño  $\frac{1}{b}$  (en total  $\frac{ab}{b}$  pedacitos) y luego dividirlos entre  $a$ . Por ejemplo, para 3 unidades entre 5:  $3u \div 5 = \frac{15}{5}u \div 5 = \frac{15 \div 5}{5}u = \frac{3}{5}u$

##### INCISO B

¿Qué diferencias hay entre los procedimientos propiciados en ambos tipos de problemas?

- En el reparto de pasteles, aparece frecuentemente la partición de las unidades en  $2^n$  (2, 4, 8...).
- En el contexto de los pasos de los robots aparece con frecuencia la estimación de una medida, y su ajuste mediante sumas iteradas.
- La idea de dividir y obtener un cociente decimal apareció mucho más en el contexto de los robots que en el de los pasteles.

La variable didáctica que explica estas diferencias es el tipo de magnitud. Ver el apartado «Variable didáctica, descontextualización, transferencia».

## Capítulo 2. Las fracciones en el papel de razones

### Actividad 2.2 Comparaciones cualitativas de razones

#### INCISO c

En el inciso c la naranjada A tiene el doble de vasos de agua que una naranjada B, pero menos del doble de vasos de jugo que la B, por lo tanto, B tiene un sabor más fuerte. Por ejemplo, A (4 de agua, 5 de naranja) y B (2 de agua, 3 de naranja).

### Actividad 2.6 Razonamientos de alumnos I

#### INCISO A

En la pareja que generó Adriana para la huerta «Sonora» (por 21, 14) se recogen más naranjas y le dan menos que en la pareja que generó para la huerta «Vista Hermosa» (por 20,18).

Para ver con más claridad el razonamiento anterior, vamos a expresar las relaciones de orden que subyacen, con las fracciones que corresponden a las razones: sean  $n$  = naranjas recogidas y  $m$  = naranjas ganadas, si  $n_1$  es  $< n_2$  pero  $m_1 > m_2$  entonces  $\frac{n_1}{m_1} < \frac{n_2}{m_2}$ .

Un ejemplo de resolución similar al de Adriana, con otras huertas X y Y, es el siguiente:

Huerta X	
Naranjas recogidas	Naranjas ganadas
5	3
10	6
15	9
20	12
25	15

Huerta Y	
Naranjas recogidas	Naranjas ganadas
13	7
26	14

En la huerta X por menos naranjas recogidas que en Y ( $25 < 26$ ), dan más ( $15 > 14$ ), por lo tanto, conviene X.

Finalmente, usando un término común, se tiene que por 65 naranjas que recojas, en la huerta X dan 39, mientras que en la huerta Y dan 35.

### INCISO B

La verificación empírica puede consistir en llevar a cabo los intercambios para una cantidad supuesta de naranjas. Dicha cantidad debe ser múltiplo de las cantidades de naranjas recogidas para evitar dificultades con los residuos, por ejemplo, para comparar el trato «por cada 6 naranjas recogidas se dan 2» con el trato «por cada 10 naranjas recogidas, se dan 3», se pueden aplicar ambos tratos a 30 naranjas. Hacer esta verificación algunas veces, ayudará a los alumnos a entender cómo funcionan los tratos. No obstante, esta manera de verificar es provisional, pues se podría cuestionar: para 30 naranjas el mejor trato fue «por cada 6, 2», pero, ¿lo será para cualquier otra cantidad? ¿Cómo estar seguros? A mediano plazo, será necesario desarrollar argumentos más potentes, y las fracciones pueden ser útiles para ello.

---

## Actividad 2.7

### Comparaciones sin hacer cálculos

- Competencia 1: la rana verde da saltos de una unidad, y la morada de más de una unidad.
- Competencias 2 y 3: las dos parejas tienen un término común. En la segunda competencia las ranas dan la misma cantidad de saltos, pero diferente recorrido, por lo tanto, gana quien llegue más lejos. En la tercera competencia tienen el mismo recorrido, pero diferente número de saltos, así que gana la que dé menos saltos.
- Competencia 4: la rana verde avanza mayor distancia en un número menor de saltos que la morada.

---

### Actividad 2.8

#### Razonamientos de alumnos II

Los tres alumnos observan que la rana verde avanza más distancia y en menos saltos que la otra. A Rachid le resulta difícil expresarlo.

---

### Actividad 2.9

#### Razonamientos de alumnos III

La maestra hizo uso de una herramienta didáctica que consistió en solicitar a los alumnos otros ejemplos (pares de datos) cuando consideró que habían llegado a una conclusión errónea. Esperaba que en algún momento propusieran un contraejemplo y, al no obtenerlo, lo propuso ella misma: con el par 50 metros, 13 saltos vs 2 metros, 3 saltos, esperaba poner en evidencia que era erróneo tomar en cuenta solo uno de los términos.

En lo que respecta a los alumnos, se ve cómo Miguel, a partir de observar la comprobación empírica de las condiciones que puso para que el salto fuera más grande, reformuló sus ideas. Primero dio importancia solamente a la cantidad de saltos, pero una vez que surgió un ejemplo en el que no se obtuvo el resultado esperado, agregó otra restricción: que el salto debería ser mayor que la unidad. Poco a poco elaboró su regla.

---

### Actividad 2.11

#### Dos usos, dos significados de las fracciones

La diferencia más importante es que, en «me comí  $\frac{1}{3}$  de naranja» la fracción expresa una cantidad, y en «les están dando  $\frac{1}{3}$ », expresa una relación entre dos cantidades, entre la cantidad de naranjas que le dan respecto de las que recoge.

### Actividad 2.13

#### Anticipar cómo resolverían los alumnos I

a) Completa los datos que faltan.

Chicos	Tiró	Encestó	Fracción del total de tiros que encestó
Alberto	12	6	$\frac{1}{2}$
Mary	24	8	$\frac{1}{3}$
Manuel	25	10	$\frac{2}{5}$
Valeria	21	14	$\frac{2}{3}$
Tatiana	24	16	$\frac{2}{3}$
Daniel	20	12	$\frac{3}{5}$

b) Ubica a los jugadores, indicando quiénes son los mejores y quiénes los peores encestadores al aro.

5to lugar	4to lugar	3er lugar	2do lugar	1er lugar
Mary	Manuel	Alberto	Daniel	Valeria y Tatiana
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$

### Actividad 2.16

#### ¿Cómo organizar el cierre de la actividad?

Para el cierre se podrían realizar dos tareas: 1) analizar, con todo el grupo, las parejas de datos como las enunciadas por Byron, y comprobar, para cada una, que es posible comparar el desempeño de la escuela correspondiente, con las otras escuelas, y 2) comprobar que todas las



parejas de datos que enunció Byron (30 de 70, 300 de 700, 3000 de 7000), corresponden a escuelas con la misma calidad de desempeño.

---

### Actividad 2.17

#### ¿Qué y cómo institucionalizar al término de la clase?

Hay una diversidad de aspectos que podrían retomarse en una puesta en común, por lo que no hay «una manera correcta». Se destacarán aquí solamente un par de ideas que aparecieron en la clase, y que por su importancia sería conveniente compartir.

La primera idea subyace a la propuesta de Byron de la posibilidad de formar parejas de cantidades cuya razón es  $\frac{3}{7}$ : 3 de 7, 30 de 70, 300 de 700. Dado lo crucial de esta reflexión desde el punto de vista del significado de la fracción como expresión de una razón entre cantidades, valdría la pena insistir en ella, por ejemplo, mediante preguntas como: «¿es correcto lo que propone Byron?», «¿podrían dar otras cantidades que guarden esa razón?», «¿podemos saber cuál de esos pares de cantidades es el que corresponde a la escuela E?». Los alumnos probablemente contestarían la última pregunta negativamente: «no podemos saber, de esos pares de cantidades, cuál es el de la escuela E», y entonces, la pregunta importante a realizar sería, «¿afecta eso la comparación con las otras escuelas? Es decir, ¿si las cantidades fueran 3 aprobados de 7, la escuela E quedaría mejor situada en su desempeño que si las cantidades fueran 300 y 700?». El propósito es que los alumnos se den cuenta de que, en todos los casos, la razón es  $\frac{3}{7}$  y por lo tanto, el lugar que tendría la escuela E en el ordenamiento de las escuelas es el mismo en todos los casos. En síntesis, las cantidades no importan, sino la razón entre ellas. Al final, el docente puede hacer explícitas estas consideraciones en calidad de cierre.

Además de lo anterior, para los alumnos que no pudieron desarrollar un procedimiento de solución, sería provechoso que se socializaran al menos dos de los procedimientos.

## Capítulo 3. Fracciones y decimales como operadores multiplicativos

### Actividad inicial

Hay varias interpretaciones posibles de lo que dice Elodie. Una es que, dado que hay una disminución de la cantidad ( $\frac{3}{4}$  de 12 es 9), ella intuye que se hace una resta (finalmente «se quita»  $\frac{1}{4}$  de 12). En efecto, pasar de 12 a 9 no parece tener nada que ver con multiplicar.

Otra interpretación podría ser que esté pensando en  $12 - \frac{3}{4}$ , como si  $\frac{3}{4}$  de 12 tuviera el sentido de «quitar  $\frac{3}{4}$  de unidad a 12 unidades», en cuyo caso la respuesta sería  $11\frac{1}{4}$  unidades.

Cabe observar que en la primera interpretación ( $\frac{3}{4}$  de 12 = 9), la unidad a la que aplica el  $\frac{3}{4}$  es 12. Se trata de una *unidad compuesta* por 12 unidades simples.

En cambio, en la segunda interpretación ( $\frac{3}{4}$  de 12 =  $11\frac{1}{4}$ ), la fracción  $\frac{3}{4}$  se está aplicando a la unidad simple y no a la compuesta.

Así, además de la dificultad de entender qué tiene que ver aquí la multiplicación, se asoma otra dificultad: saber a qué unidad se refiere la fracción.

### Actividad 3.1

#### Análisis de una lección de un libro de texto sobre la multiplicación de fracciones (parte I).

##### INCISO A

A  $\frac{2}{5}$  de vuelta le corresponden  $\frac{2}{5}$  de 60 km. Para obtener  $\frac{2}{5}$  de 60 km los alumnos pueden partir de su conocimiento de «fracción de unidad»: obtener en primera instancia  $\frac{1}{5}$  de 60 dividiendo 60 entre 5, y después multiplicar ese resultado por 2.

Para obtener 0.25 veces 60 km, pueden representar el número 0.25 en forma fraccionaria, ya sea  $\frac{25}{100}$ , o bien,  $\frac{1}{4}$ .

**INCISO B**

Los alumnos no necesitan conocer el algoritmo convencional de la multiplicación de fracciones, ni el de decimales. Se espera que se den cuenta de que el resultado de multiplicar 60 por un multiplicador menor que uno, por ejemplo  $\frac{2}{3}$ , arroja un resultado menor que 60, mientras que, si el multiplicador es mayor que uno, el resultado es mayor que 60. Para llevar a cabo estas inferencias, es bueno que recuerden todo el tiempo que multiplicar, por ejemplo,  $\frac{2}{3}$  por 60 significa obtener  $\frac{2}{3}$  de 60, y entonces, dividirán 60 entre 3 y tomarán 2 partes. Se recomienda hacer una puesta en común a la mitad de los ejercicios y ayudar a los alumnos a recordar el procedimiento explicado anteriormente que consiste en fijarse si el multiplicador es mayor o menor que 1.

---

**Actividad 3.2**
**Análisis de una lección de un libro de texto sobre la multiplicación de fracciones (parte II)**
**INCISO A**

¿Qué se mantuvo y qué cambió en la estructura del contexto y en los datos numéricos en esta lección en comparación con la anterior (lección 9)? Se mantuvo la misma estructura: una relación de proporcionalidad entre un conjunto de multiplicadores variables («números de vueltas del trenecito») y un conjunto de distancias. La medida del circuito es la constante de proporcionalidad, pero ahora esa medida es una fracción ( $\frac{3}{4}$  de hm). Esto permite generar multiplicaciones de una fracción por una fracción.

**INCISO B**

En el inciso **1a** de la lección, los alumnos deben calcular cuánto es  $\frac{1}{4}$  de  $\frac{2}{5}$  de hectómetro, pero aún no saben multiplicar fracciones. ¿Cómo pueden resolver esta multiplicación?

Saben que  $\frac{1}{4}$  es la cuarta parte, y que eso se obtiene dividiendo entre 4. Deben ya saber dividir una medida fraccionaria entre un número natural (dividiendo el numerador, o multiplicando el denominador), pero es probable que no lo recuerden. En el recuadro de la izquierda de la lección 10 se da un breve recordatorio.

Por otra parte, es posible que algunos alumnos propongan convertir los hectómetros a metros, para entonces resolver el problema así:

$$1 \text{ vuelta} = 40 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2} \text{ vuelta} = 20 \text{ m}$$

$$\frac{1}{4} \text{ vuelta} = 10 \text{ m}$$

La resolución es buena, sin embargo, dado que interesa estudiar la multiplicación por fracciones, será necesario pedir a los alumnos que hagan una segunda resolución, sin convertir a metros.

---

### Actividad 3.5

#### Situación del rompecabezas, en un grupo de sexto grado de primaria

#### INCISO A

Algunos procedimientos son:

- encontrar el valor unitario (en la primera experiencia,  $1\frac{3}{4}$  o 1.75 y en la segunda  $1\frac{3}{5}$  o 1.6);
- identificar el incremento relativo (3 de cada 4 en la primera experiencia, 3 de cada 5 en la segunda);
- la composición de dos operadores enteros, uno que divide, uno que multiplica  $—(\div 4 \times 7)$  o bien  $(\div 5 \times 8)—$ ;
- determinar el operador multiplicativo  $\frac{8}{5}$  (también llamado factor de proporcionalidad), ya sea directo o bien, centrado en el incremento  $(x + \frac{3}{5}x)$ .<sup>49</sup>

Se busca propiciar este último procedimiento: el operador multiplicativo  $(\times \frac{7}{4}, \text{ o } \times 1.75; \times \frac{8}{5}, \text{ o } \times 1.6)$ .

**INCISO B**

Las expresiones del operador multiplicativo que aparecieron fueron las siguientes (la escritura en lenguaje algebraico no es de los alumnos).

- $x \rightarrow x + \frac{3}{5} \text{ de } x$   
*Cada medida más  $\frac{3}{5}$  de sí misma*
- $x \rightarrow (x \div 5) \times 8$   
*Es que es como la escala (...), queremos pasar por uno (dibuja un cuadrado pequeño, luego uno grande (...)) necesitamos la escala de uno para luego pasar a la que quieras.*  
*Todo se divide entre 5 y el resultado es un quinto, y luego por 8.*
- $x \rightarrow \frac{8}{5}x$  (un alumno)  
*(El alumno no dice explícitamente esta idea, queda implícita en las operaciones «dividir entre 5 y multiplicar por 8»).*
- $x \rightarrow 1.6x$   
*Un centímetro del original vale 1.6 centímetros en el rompecabezas que se va a reproducir.*

**INCISO C**

La multiplicación de una medida  $M$  por una fracción  $\frac{a}{b}$  puede interpretarse como:

- dividir la medida  $M$  entre  $b$  y luego multiplicarla por  $a$ .
- o bien.
- encontrar la medida que corresponde a  $M$  en una relación en la que a 1 le corresponde  $\frac{a}{b}$ :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \frac{a}{b} \\ M &\rightarrow \frac{a}{b} \times M \end{aligned}$$

#### INCISO D

Algunos errores...

- El más importante es el procedimiento aditivo.
- Los alumnos se dan cuenta del error de varias maneras: una, al armar el rompecabezas y ver que se deforma; otra, al observar que a dos lados del cuadrado les corresponderían medidas diferentes.

#### INCISO E

Los alumnos no reconocen aún la operación de «obtener  $\frac{8}{5}$  de» como multiplicación.

#### INCISO F

A diferencia del rompecabezas con varias piezas, si se usa una sola pieza, por ejemplo, un rectángulo, podría no notarse a simple vista cuando, debido a un error, este se deforma.

---

### Actividad 3.7

#### Una lección del libro de texto de primaria

#### INCISO A

Las otras cuatro razones son:

- «3 kg de harina por cada 5 kg de grano» (la cantidad de harina es igual a la cantidad de grano por  $\frac{3}{5}$ );
- «5 kilogramos de masa por cada 2 kg de harina» (la cantidad de masa es igual a la cantidad de harina por  $\frac{5}{2}$  o por  $2\frac{1}{2}$ );
- «7 kg de tortilla por cada 10 kg de masa» (la cantidad de tortillas es igual a la cantidad de masa por  $\frac{7}{10}$ );

- «1 kg de tortillas por \$4.50» (en este caso, por tratarse de dinero, lo más práctico es usar decimales: el precio por kilo de tortilla es de \$4.50 o, considerando que un kilo son aproximadamente 37 tortillas, el precio por tortilla es \$0.12).

### INCISO B

Por ejemplo, para calcular cuántos kilogramos de harina corresponden a 100 kg de grano de maíz, y sabiendo que con 5 kg de maíz se producen 3 kg de harina, se puede averiguar que 100 kg es 20 veces 5 kg, y por lo tanto le corresponden 20 veces 3 kg de harina (20 veces es una razón interna que se conserva).

	Maíz		Harina	
	5		3	
× 20				× 20
	100		60	

### INCISO C

En el punto 1 de la lección se menciona que «con 10 kilogramos de masa, se producen aproximadamente 7 kilogramos de tortilla». En el punto 5 esta relación se expresa con una fracción: «La cantidad de tortillas es  $\frac{7}{10}$  de la cantidad de masa».

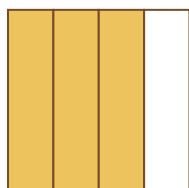
### INCISO D

Se trata del problema 3c. Le corresponde el renglón d) en la tabla. Para calcular cuántos kg de tortilla se obtienen con 100 kg de maíz, es necesario calcular primero cuántos kg de harina se obtienen (60kg); luego, cuántos kg de masa se obtienen (150 kg) y finalmente cuántos de tortillas (105 kg). Las cantidades coinciden con las que se calcularon antes, pero esto, de entrada, no lo saben los alumnos.

### Actividad 3.9

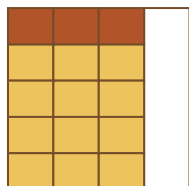
#### Procedimientos informales para dividir una fracción entre un número natural

##### INCISO B



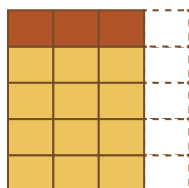
$$\frac{3}{4}$$

Una forma de dividir  $\frac{3}{4}$  de un entero entre 5, consiste en sombrear  $\frac{3}{4}$  de un rectángulo, al hacer una partición vertical...



$$\frac{3}{4} \div 5$$

... luego, con líneas horizontales, dividir la superficie ya sombreada en 5 partes y marcar una.



$$\frac{3}{4} \div 5 = \frac{3}{20}$$

Finalmente, dividir el último cuarto del entero en 5 partes, para ver a qué fracción de unidad corresponden los pequeños cuadritos (veinteavos).

Este procedimiento puede dar lugar a una generalización, si se aplica varias veces: para dividir una fracción entre un número entero, se puede multiplicar su denominador por el número entero.

Con respecto al segundo problema del inciso a): la división  $\frac{6}{11}$  entre 3 constituye un caso fácil, pues el numerador (6) es múltiplo del divisor (3): basta con dividir el numerador entre 3, lo cual puede ser además bastante intuitivo.



$$\frac{6}{11} \div 3 = \frac{6 \div 3}{11} = \frac{2}{11}$$

Por supuesto, también se puede aplicar la generalización anterior:

$$\frac{6}{11} \div 3 = \frac{6}{11 \times 3} = \frac{6}{33} = \frac{2}{11}$$

---

### Actividad 3.11

#### Explorando procedimientos

Una forma de encontrar el número que multiplicado por  $\frac{4}{5}$  es igual a  $\frac{2}{3}$  consiste en utilizar la propiedad según la cual, si se multiplican los dos miembros de una igualdad por una misma cantidad, se genera una nueva igualdad. Entonces, si multiplicamos por el operador inverso  $\frac{5}{4}$  los dos miembros de la igualdad  $\frac{4}{5} \times x = \frac{2}{3}$ , se genera una nueva igualdad, y observe lo que ocurre:

$$\frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times x = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3},$$

$$\frac{20}{20} \times x = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3}, \text{ y como } \frac{20}{20} \text{ es igual a } 1, \text{ entonces,}$$

$$x = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} \text{ (aquí se puede observar que dividir entre una fracción equivale a multiplicar por la inversa),}$$

$$\text{Finalmente, } x = \frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Por lo tanto,  $\frac{5}{6}$  es el número que multiplicado por  $\frac{4}{5}$  da  $\frac{2}{3}$ .

Sin embargo, este camino descansa en un dominio de propiedades que los alumnos del nivel básico no suelen tener. Es, además, un razonamiento en el nivel numérico, que deja de lado los contextos, en los que la división cobra ciertos significados.

---

### Actividad 3.12

#### Análisis de lecciones de un libro de texto sobre multiplicación y división de fracciones

##### INCISO A

Entre otras cosas, al trazar las figuras pueden verificar si fue correcta su anticipación de qué figura, A1 o A5, saldría más grande.

##### INCISO B

Es previsible que los alumnos no se den cuenta de que necesitan el factor inverso y cometan el error de aplicar el factor  $\frac{2}{5}$ .

##### INCISO C

Una forma de ayudar consiste en proporcionar ejemplos que los alumnos puedan resolver de las dos maneras, aun sin saber dividir fracciones, para que vean que se verifica la equivalencia, por ejemplo, multiplicar por  $\frac{1}{2}$  y dividir entre 2; ambas arrojan el mismo resultado siempre, y ambas «deshacen» la multiplicación  $\times 2$ , por lo tanto, son equivalentes. También puede mostrar, con apoyo de un poco de álgebra, que cuando dos expresiones arrojan el mismo resultado para muchos números, puede «sospecharse» que son equivalentes, por ejemplo, las expresiones  $2(a+b)$  y  $2a + 2b$ . Decimos «puede sospecharse», porque para estar seguros haría falta hacer una demostración.

---

### Actividad 3.13

#### Análisis de lecciones de un libro de texto sobre multiplicación y división de decimales.

##### LECCIÓN 74

El propósito es contribuir a elaborar significados para la multiplicación por números no enteros.

## LECCIÓN 76

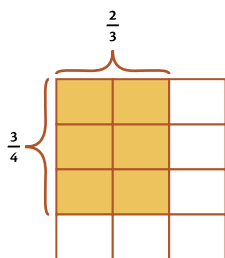
Se trata de cuestionar la idea de que dividir siempre achica y multiplicar siempre agranda.

### Actividad 3.14

#### Desarrollo del algoritmo de la multiplicación de fracciones

## INCISO C

Una forma de calcular el área de un rectángulo de  $\frac{2}{3}$  por  $\frac{3}{4}$  es la siguiente:



Área =  $\frac{6}{12}$  de unidades cuadradas

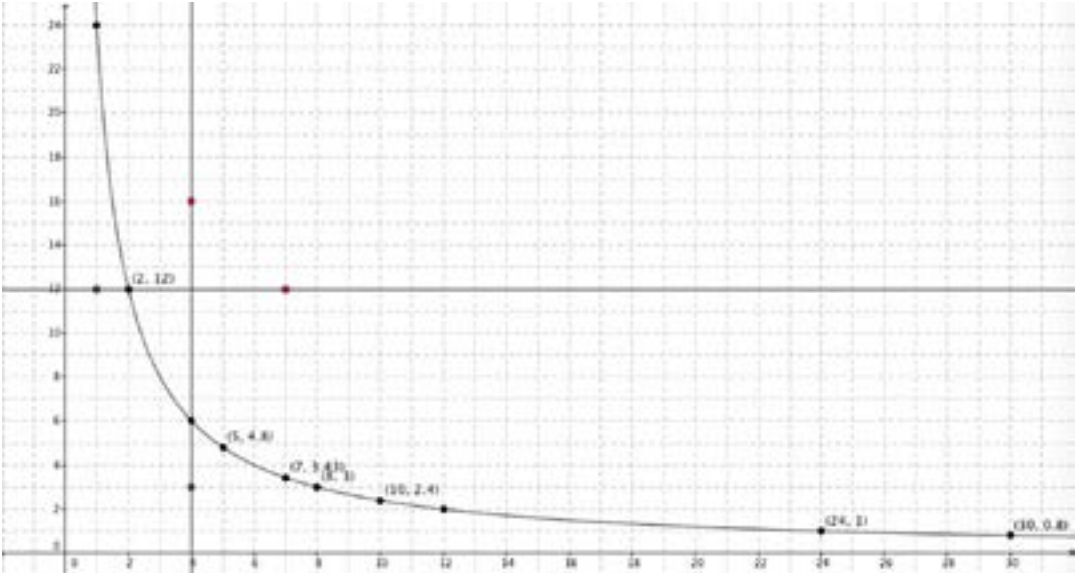
Al calcular algunas áreas más, cuyos lados midan fracciones de unidad, se podrá inferir que: 1) la superficie queda dividida en un número de partes que es igual al producto de los denominadores de las fracciones, y 2) el número de partes que corresponden al resultado, es el producto de los numeradores. De donde el siguiente algoritmo:

$$\frac{a}{b} \text{ de unidad} \times \frac{c}{d} \text{ de unidad} = \frac{a \times c}{b \times d} \text{ de unidad cuadrada.}$$

### Actividad 3.15

#### Rectángulos con un área dada

Representación gráfica de áreas de rectángulos mayores, menores e iguales a 24:



La ordenada del punto negro que tiene por abscisa 7, es  $\frac{24}{7}$ , puesto que  $\frac{24}{7} \times 7 = 24$ ;  
 $\frac{24}{a}$  es la medida de un lado del rectángulo cuyo otro lado mide  $a$ .

## Notas

- 1 Ver Block, Mendoza y Ramírez, 2010.
- 2 Ver Bock, Martínez y Moreno, 2013.
- 3 Ver Brousseau, 2000.
- 4 Maestro y Doctor en Educación con especialidad en Educación Matemática, ha sido profesor de educación primaria, de bachillerato y formador de profesores; es autor y coautor de artículos y libros sobre la enseñanza de las matemáticas. Actualmente coordina el *Doctorado en Desarrollo Educativo con Énfasis en Formación de Profesores* de la Universidad Pedagógica Nacional en la región Noreste de México.
- 5 Finalmente, está la definición de los números racionales como clases de equivalencia de parejas ordenadas de números enteros, la cual no revisaremos aquí.
- 6 La denominación de «fracciones comunes» no aporta al concepto de fracción, solo se usa para precisar que se está hablando de fracciones en general, y no a un tipo de fracciones en particular.
- 7 Tomado de Dávila, 1992, pp. 37 y 38.
- 8 Tomado de Block y Solares, 2001, p. 22.
- 9 Recordemos que entre los tipos de problemas que implican dividir, se pueden distinguir los de *reparto*, que consisten en dividir una cantidad en cierto número de partes iguales y determinar de qué tamaño es una parte, y los de *agrupamiento* en los que se dan dos cantidades, y se necesita averiguar cuántas veces cabe una en la otra, o cuántos grupos de cierta cantidad se pueden formar con la otra. Por ahora nos ocuparemos solamente de los problemas de reparto.
- 10 En la Introducción de este libro se comentó el origen de este término.
- 11 Dávila, 1992.
- 12 Esta evolución fue estudiada por Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960.

- 13 Algunos niños, entre los más pequeños, consideraron que, si los pedazos se volvían a acomodar devolviéndoles su forma original, entonces las superficies dejaban de ser iguales. Estos niños, dice Dávila (1992), probablemente no son aún «conservadores de área». Esa limitación desaparecería más o menos pronto, con el desarrollo de los niños.
- 14 La cantidad de niños entre los que hace el reparto es una *variable didáctica*. En el Volumen I de esta obra se da la siguiente definición: Se llama variable didáctica a «aquellas condiciones que pueden variar a voluntad del docente y que, según los valores que toman, modifican el conocimiento necesario para resolver la situación.» (Fregona y Orús Báguena, 2011, p. 30)
- 15 Para la realización de esta actividad se contó con la generosa colaboración de Irma Saiz.
- 16 Block, 2006a.
- 17 Solares, 2005; Block y Solares, 2001.
- 18 El texto completo del artículo de Block y Solares 2001 está accesible en internet.
- 19 En este procedimiento se puede ver la puesta en marcha de un sistema de medición «binario» basado en el mismo principio que el decimal: así como en el sistema decimal cualquier medida puede ser aproximada mediante fracciones decimales (del tipo  $\frac{n}{10^m}$ , como  $\frac{3}{100}$ ) en el binario, las medidas se aproximan mediante fracciones del tipo  $\frac{n}{2^m}$  (por ejemplo  $\frac{3}{2^4}$ , o sea  $\frac{3}{16}$ ).
- 20 La actividad implicaba, además de hallar la medida del paso de cada robot, redactar un mensaje dirigido al constructor de robots, en el que le darían las instrucciones para hacer robots con el tamaño de paso requerido.
- 21 El recorrido, compuesto de varias operaciones, es largo, y la explicación es de índole algebraica:  $a \div b = \frac{ab}{b} \div b = \frac{(ab \div b)}{b} = \frac{a}{b}$
- 22 Tanto la cantidad de pastel como la longitud de un paso son magnitudes continuas, (a diferencia de las discretas, como una bolsa con canicas), pero la magnitud «pasteles» se presenta subdividida en unidades (cada pastel es una unidad), como si fuera discreta, mientras que la longitud del paso no se presenta así.
- 23 En una secuencia de situaciones diseñada de Guy Brousseau, se introduce la noción de fracción directamente como cociente, sin pasar por la de partes de unidad. Se trata de una secuencia experimental interesante, pero difícil de ser implementada en las clases debido a que es muy distinta de las opciones conocidas por los docentes, e implica comprometerse con esa propuesta durante un buen periodo de tiempo, esto es, no se trata de una situación aislada, sino de un proyecto de largo plazo. Dicha secuencia puede consultarse en Brousseau, Brousseau y Warfield, (2004) o, de manera resumida, en el texto de Centeno (1997).
- 24 Alumnos de primer grado de secundaria. Tomado de Sosa y Block (2019, p. 6).

- 25 Tomado y adaptado de Block, Mendoza, y Ramírez (2010, p. 67).
- 26 En la Teoría de las Razones y Proporciones, la proporción es una igualdad de dos razones. Pero hoy en día, el lenguaje común ha adoptado el término como sinónimo de razón, por ejemplo, en expresiones como «esa proporción de azúcar es muy grande». En el presente texto usaremos la palabra razón.
- 27 Inhelder y Piaget (1955) consideraron que es aproximadamente a los 12 años de edad, que los niños empiezan a hacer razonamientos correctos, poniendo en juego multiplicaciones y no sumas. No obstante, estas consideraciones son relativas. Se ha visto que en situaciones más accesibles que las que usó Piaget, los alumnos pueden desarrollar razonamientos correctos mucho antes de esa edad (Levain, 1997). Es bueno saber, de cualquier forma, que la capacidad plena para hacerlo, toma varios años en desarrollarse.
- 28 La secuencia de situaciones construida por G. Brousseau para la construcción del operador multiplicativo fraccionario y decimal, está basada en un contexto de escala (Brousseau, 1981). También se puede ver una parte de esa secuencia en (Block, 2008).
- 29 Eugène Comin desarrolló una secuencia didáctica en el contexto lúdico de familias con distintas cantidades de ratones que se reparten semillas, se trata de ver si los repartos fueron justos (Comin, 2003).
- 30 Antigüamente se llamaba *el exponente de la razón* (e.g., Dalmau, 1938, p.163 citado en Bosch, M., 1994, p. 172).
- 31 La justificación de esta fusión radica en la evolución del conocimiento matemático mismo. Los matemáticos de la antigua Grecia no consideraban números más que a los naturales. Los números que hoy conocemos como los racionales positivos, eran expresados como razones de números enteros (por ejemplo,  $\frac{3}{5}$  era expresado como 3 es a 5). Los números irracionales, como  $\sqrt{2}$  fueron desarrollados varios siglos más tarde. Sin embargo, los matemáticos griegos lograron identificar razones de cantidades de magnitud a las que corresponden valores irracionales, como la razón que guarda la circunferencia con el radio ( $\pi$ ). En esos casos, se comprende que las razones hayan sido muy necesarias. Pero, conforme se fueron desarrollando nuevos conjuntos numéricos, resultó más práctico expresar una razón con un número.
- 32 Sin olvidar que el valor de una razón también puede ser un número natural.
- 33 Tomada de un trabajo de investigación (Block, 2006a y 2008).
- 34 Tomada de Block (2021), Block y Martínez (1999) y Block y Reséndiz (2006).
- 35 Para ampliar este tema pueden consultar los textos: Ramos y Block (2016), Block (2006b) y Block (2021).
- 36 Ejemplo recopilado de Block (2008).

- 37 Usamos el signo  $\approx$  para indicar aproximadamente igual, o «casi igual».
- 38 Ver Sosa y Block (2019).
- 39 Alumno de la experiencia «Diario de fracciones» en Sensevy, 1996, p. 24.
- 40 Freudenthal propone el contexto de «vueltas a una llave» y sugiere empezar con fracciones mixtas, como « $2\frac{1}{3}$  vueltas» (Freudenthal, 1983, pp. 165-168).
- 41 Un resumen de dicha secuencia se encuentra en el texto de Block, 2008. La secuencia completa puede estudiarse en Brousseau, 1981 y también en la colección de cuatro artículos publicados en inglés por Guy Brousseau, Nadine Brousseau y Virginia Warfield (2004, 2007, 2008 y 2009).
- 42 La clase se realizó en un grupo de sexto grado de una escuela primaria de la Ciudad de México, en el marco del proyecto de tesis doctoral de David Block, en junio y julio de 1995.
- 43 Esta escritura no es de los alumnos.
- 44 Es probable que este tipo de definiciones, mediante la idea de razón, date de la época de Euclides. Tiempo después, en el siglo VII, Al Khwarizmi define la multiplicación de esta manera, definición que subsistió hasta finales del siglo XIX y principios del XX, en los textos de aritmética.
- 45 Traducción del autor.
- 46 Palabra francesa que significa «medio», es concepto fundamental y complejo (con varios significados) de la Teoría de las Situaciones Didácticas. *Grosso modo* puede decirse que refiere a la problemática con la que interactúa una persona, un alumno en este caso, que asume lograr un objetivo, por ejemplo averiguar un dato o ganar un juego. Las instrucciones que se le dan, y la manera en que las comprende, le dan forma al medio; incluye también a los objetos materiales disponibles y a los otros participantes, cuando están involucrados de algún modo. Se busca que el conocimiento matemático que interesa que los alumnos aprendan, sea necesario en ese medio para lograr el objetivo.
- 47 Recuérdese que en la situación adidáctica, teóricamente el profesor debe evitar guiar el proceso, dar ayudas. A esto Sensevy lo llama «reticencia del profesor», reticencia a dar información, ayuda, etc.
- 48 Se refiere al modelo aditivo que siguen los alumnos.
- 49 Estas expresiones algebraicas se usan aquí para comunicar al docente, en síntesis, una forma de establecer el operador. Queda a criterio del profesor de secundaria, en función del avance de su grupo en el uso de expresiones algebraicas, si vale la pena o no introducirlo.



## Bibliografía

- Block, D. (2006a). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico. En *Tesis de Doctorado DIE* (versión disco compacto). Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav.
- Block, D. (2006b). Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón 'múltiplo' y su vinculación con la multiplicación de números naturales. *Educación Matemática*, 18 (2), pp. 5-36. <http://www.revista-educacion-matematica.com/revista/vol18-2/>
- Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*, (pp. 495-512). Díaz de Santos de México, Clame. A. C. <http://www.die.cinvestav.mx/Portals/die/SiteDocs/Investigadores/DBlock/EstudiosDidNRFD/2-3-2008elPapeldela.pdf>.
- Block Sevilla, D. (2021). «Los saltos de las ranas». Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación Matemática*, 33 (2), p. 116-147. <https://doi.org/10.24844/em3302.5>
- Block, D., García, S. y Balbuena, H. (2018). *Matemáticas 2. (Serie ConectaMÁS. Secundaria)*. SM de Ediciones, S.A. de C.V.
- Block, D., García, S. y Balbuena, H. (2020). *Matemáticas 1. (Serie ConectaMÁS. Secundaria)*, (2da reimpresión). SM de Ediciones, S.A. de C.V.
- Block, D. y Martínez, P. (1999). Frogs' jumps: An example of using computers as a means of empirical validation. En R. Nikolov, E. Sendova e I. Nikilova (Eds.), *Eurologo 99. Proceedings of the Seventh European Logo Conference* (pp. 150-159). Virtech Ltd., Sofia, Bulgaria.
- Block, D., Martínez, P. y Moreno, E. (2013). *Repartir y comparar. La enseñanza de la división entera en la escuela primaria. (Colección «Somos Maestr@s» de la Serie «Enseñar y Aprender»)*. SM de Ediciones S. A. de C.V.

- Block, D., Mendoza, T y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica* (Colección «Somos Maestr@s» de la Serie «Enseñar y Aprender»). SM de Ediciones S.A. de C.V.
- Block, D. y Reséndiz, L. (2006). Experiencia didáctica 'los saltos de las ranas'. La noción de razón como precursora de medidas fraccionarias. En: *Resúmenes de la Vigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (p.63). Clame y la Universidad de Camagüey, Cuba.
- Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *Educación Matemática*, 13 (2), pp. 5-30. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol13/2/02Block.pdf>.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. (Tesis de Doctorado no publicada). Departament de Matemàtiques. Facultat de Ciències. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de Didatique des Décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (1), 37-127.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Éditions.
- Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12 (1), 5-28.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 23 (1), 1-20.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 2: From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior*, 26 (4), 281-300.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2008). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 3: Rationals and decimals as linear functions. *Journal of Mathematical Behavior*, 27 (3), 153-176.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2009). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 4: Solving, composed mappings and division. *Journal of Mathematical Behavior*, 28 (2), pp. 79-118.
- Centeno, J. (1997). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*, Serie Matemáticas: cultura y aprendizaje, (Vol. 5, pp. 119-126). Editorial Síntesis, S.A.
- Comin, E. (2003). Des graines et des souris. *Grand N*, 72, pp. 41-73.
- Dávila, M. (1992). El reparto y las fracciones. *Revista de Educación Matemática*, 4 (1), 32-45. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-1/vol4-1-3.pdf>
- Douady, R. (1980). Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. Enfants de 6 à 11 ans. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 1(1), 77-111. <https://revue-rdm.com/1980/approche-des-nombres-reels-en/>
- Fregona, D. y Orús Báguena, P. (2011). *La noción de medio en la Teoría de las Situaciones Didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Libros del Zorzal.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel Publishing Company.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent* (Colección «Bibliothèque de Philosophie Contemporaine»). Presses Universitaires de France (PUF).
- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grade*. (Serie «Research agenda for mathematics education, vol. 2), (pp. 162-181). Lawrence Erlbaum Associates; Reston, VA; National Council of Teachers of Mathematics.
- Levain, J.P. (1997). *Faire des maths autrement. Développement cognitive et proportionnalité* (Collection: *Espaces Théoriques*). L'Harmattan.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). Subdivision of Areas and the Concept of Fraction. En *The Child's conception of geometry* (pp. 365-380). Routledge and Reagan Paul.
- Ramos, D. y Block, D. (2016). «Por cada tres naranjas que recojas, te doy dos». Una propuesta didáctica para trabajar con razones y expresarlas con fracciones. *Revista para maestr@s de educación básica. Digital «Entre Maestr@s»*, 16 (57), pp. 54-63. <http://editorial.upnvirtual.edu.mx/index.php/entre-maestr-s/10-revista-entre-maestr-s/367-numero-57> y <https://bit.ly/2Wwqc8B>
- Saiz, I. y Parra, C. (2013). *Hacer Matemáticas 4 (nueva edición)*. Editorial Estrada, S.A.
- Sensevy, G. (1996). Le temps didactique et la durée de L'élève. Etude d'un cas au cours moyen: le journal des fractions. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16 (1), pp. 7-46.
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. (Colección «Perspectives en éducation & formation»). Groupe de Boeck S.A.
- Secretaría de Educación Pública [SEP] (2001). *Matemáticas. Sexto grado*. CONALITEG.
- Solares, D. (2005). La fracción como resultado de una división. Un estudio didáctico. En *Tesis DIE 1990-2005* (versión disco compacto). Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav.
- Sosa, J.J. y Block, D. (2019). Variantes de un tipo de tarea para favorecer la expresión de razones con fracciones. En: *Memorias electrónicas del XV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (13 p.). COMIE. <http://app.core-apps.com/cnie2019/abstracts/list/0>.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (Serie «Research agenda for mathematics education, vol. 2), (pp. 141-161). Lawrence Erlbaum Associates; Reston, VA; National Council of Teachers of Mathematics.



## El autor



David Block Sevilla, investigador SNI III del Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, durante casi 40 años ha incursionado en diversas líneas de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con el propósito de profundizar en el estudio de nociones específicas, principalmente en la problemática didáctica de las estructuras multiplicativas (la operación de división, la noción de fracción y la noción de razón) en la educación básica.

Su trabajo abarca varias vertientes, entre ellas, el diseño y experimentación de situaciones didácticas, estudios de prácticas de enseñanza en escuelas multigrado y escuelas de organización completa y conocimientos adquiridos fuera de la escuela, en especial con adultos no alfabetizados. A la par del trabajo de investigación, ha participado en numerosos proyectos de desarrollo curricular a nivel nacional: programas y libros para la formación de maestros, materiales de apoyo

para los alumnos, en particular, libros de texto oficiales y evaluación de programas educativos, entre otros.

Con respecto a la formación de recursos humanos, ha dirigido más de 20 tesis de posgrado y ha contribuido en la formación y actualización de profesores y a consolidar cuadros de especialistas en la enseñanza de las matemáticas, varios de ellos con una participación importante en el sector educativo.

Sus líneas de investigación asumen como principal referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas, creada originalmente en Francia por el Dr. Brousseau y aportan conocimientos desde una perspectiva epistemológica (problemas vinculados a su construcción), curricular (la lógica de los cambios que han sufrido a lo largo de las reformas a los programas), didáctico (diseño y experimentación de secuencias de situaciones, análisis de procesos de aprendizaje) y sobre las prácticas de enseñanza en el aula.

El autor agradecerá todo comentario que ayude a mejorar esta obra en futuras ediciones. Se puede dirigir a: davidblock54@gmail.com





Taberna Libreria  
Editores

MÁS DE UNO, PERO MENOS DE DOS.  
LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES Y LOS DECIMALES  
EN LA EDUCACIÓN BÁSICA.  
OTRA VÍA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS  
de David Block Sevilla,  
se terminó de imprimir en el mes de octubre de 2022.  
Cuidado de la edición a cargo del autor.  
500 ejemplares